Série A. N° 130

THESE

présentée

à la FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Y. EL GAMMAL

Ancien élève de l'E.N.S.T.

pour l'obtention

du titre d'ingénieur-docteur

Sujet de thèse : Propagation et réflexion d'une onde électromagnétique dans une transition entre deux guides circulaires.

Soutenue le 24 février 1971 devant la commission d'examen

Monsieur le professeur GRIVET	Président
Monsieur le professeur BERTEIN	Examinateur
Monsieur POITEVIN, ingénieur en chef des télécommunications	Examinateur

T H E S E S

présentées

A LA F A C U L T E DES S C I E N C E S

DE L' U N I V E R S I T E DE P A R I S.

Pour obtenir le titre d'Ingénieur-Docteur

par

Y. EL GAMMAL

Ancien élève de l'E.N.S.T.

1ère THESE : PROPAGATION ET REFLEXION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UNE TRANSITION ENTRE DEUX GUIDES CIRCULAIRES

2ème THESE :

Soutenues le 24 février 1971 devant la Commission d'Examen.

Monsieur le Professeur GRIVET	-	Président
Monsieur le Professeur BERTEIN	-	Examinateurs
Monsieur l'Ingénieur en Chef des Télécommunications POITEVIN	-	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-:-:-:-

I- INTRODUCTION 1

II- RAPPELS THEORIQUES 1

1. Propagation dans un cône infini 1

a) Composantes du champ électromagnétique 3
b) Conditions aux limites 4
c) Impédance d'onde 5
d) Simplification dans le cas des petits angles 6

2. Propagation dans une transition 6

a) Propagation dans une transition conique 7
b) Propagation dans une transition à profil quelconque 9

III - REFLEXION TOTALE DANS UNE TRANSITION 12

1. Transition conique 12

a) Incidence d'un mode TM_{01} 13
b) Formule approchée du plan de court circuit dans la transition 15
c) Plan de court-circuit apparent 17
d) Onde incidente en mode TE_{21} 19

2. Transition à profil quelconque 20

IV - CALCUL NUMERIQUE 20

1. Programmes utilisés 20

2. Résultats obtenus en mode TM_{01} 20

a) Effet de l'angle d'ouverture de la transition 20
b) Effet de la variation du diamètre du guide A 21
c) Effet de la variation du diamètre du guide B 21
d) Comparaison plan court-circuit dans la transition - plan court-circuit apparent 21

3. Résultats obtenus en mode TE_{21} 21

V - VERIFICATIONS EXPERIMENTALES 21

1. Montage de mesure 27

2. Méthode de mesure 28

3. Résultats 28

4. Comparaison entre résultats de calcul et résultats expérimentaux 34

VI - APPLICATION 34

VII - CONCLUSION 36

VIII - BIBLIOGRAPHIE 38

ANNEXE

I - INTRODUCTION

Cette étude décrit la propagation des ondes électromagnétiques dans un système composé de deux guides circulaires de diamètres différents reliés entre eux par une transition à profil quelconque. On envisage également le cas où l'onde électromagnétique dans un mode donné ne peut se propager que dans un des guides circulaires et une partie de la transition, le guide de sortie étant à la coupure pour le mode considéré.

Après un rappel théorique et l'étude d'une transition dans le cas général, on aborde le problème dans le cas particulier de deux modes de propagation (mode TM_{01} et mode TE_{21}).

Les résultats théoriques ainsi obtenus sont comparés aux mesures expérimentales effectuées en laboratoire. Enfin une application justifie l'objet de cette étude.

II - RAPPELS THEORIQUES

1. Propagation dans un cône infini

Considérons le cône représenté figure 1 et supposons que ses parois sont parfaitement conductrices. Choisissons un système de coordonnées sphériques et appliquons la méthode de BROMWICH en nous limitant aux fonctions sinusoïdales du temps, c'est à dire aux fonctions de la forme

$e^{j\omega t} \quad U (\rho \theta \phi)$

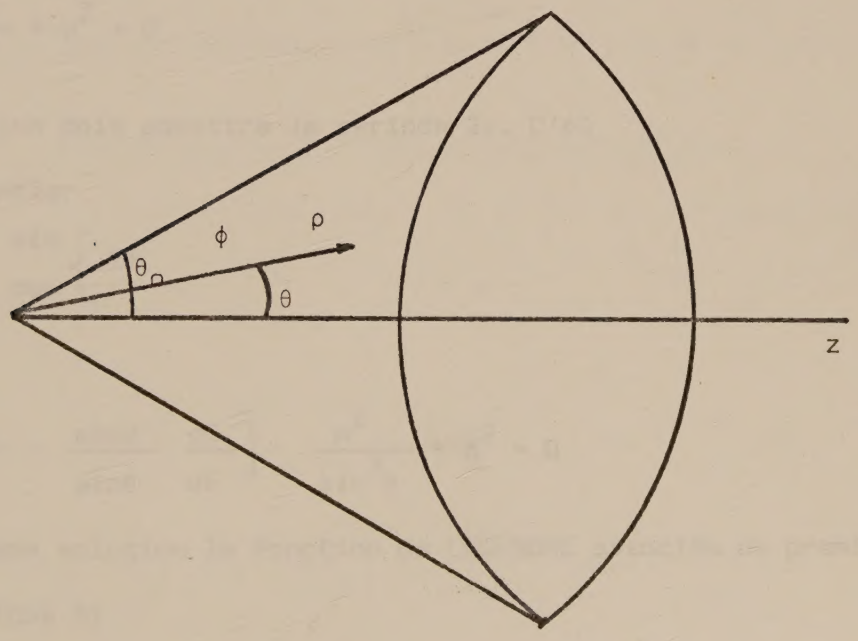


FIGURE 1

La fonction U est donnée par :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta . \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) \right\} + k^2 U = 0. \qquad (1)$$

Posons $U = \sqrt{\rho}\ F(\rho, \theta, \phi)$;

L'équation précédente devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{1}{4} \frac{F}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + k^2 F = 0. \qquad (2)$$

Cherchons une solution ayant la forme d'un produit de LAPLACE :

$$F(\rho, \theta, \phi) = R(\rho)\, \Theta(\theta)\, \Phi(\phi) \qquad (3)$$

Substituons et divisons par $R\Theta\Phi$. Nous avons :

$$\frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \right\} + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\Theta}{d\theta} \right\} +$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + k^2 - \frac{1}{4\rho^2} = 0 \qquad (4)$$

Posons alors

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \mu^2 = 0 \qquad (5)$$

La solution doit admettre la période 2π. D'où

μ = m entier

et $\Phi = \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \Big\{ m\phi$ (6)

puis

$$\frac{1}{\Theta} \left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\Theta}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + q^2 = 0 \qquad (7)$$

qui a comme solution la fonction de LEGENDRE associée de première espèce :

$$\Theta = P_n^m (\cos\theta) \qquad (8)$$

avec $q^2 = n(n+1)$.

.../.

La fonction R sera déterminée par :

$$\frac{1}{R}\left[\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right] - \frac{n(n+1) + \frac{1}{4}}{\rho^2} + k^2 = 0 \qquad (9)$$

dont la solution est :

$$Z_{n+1/2}(k\rho)$$

où $Z_{n+1/2}$ est une combinaison linéaire des deux fonctions de Bessel J et Y.

avec J = fonction de Bessel de première espèce

et Y = fonction de Bessel de seconde espèce dite aussi de Neumann.

$$Z_{n+1/2}(k\rho) = A\, J_{n+1/2}(k\rho) + B\, Y_{n+1/2}(k\rho) \qquad (10)$$

On remarque à ce propos que si le sommet du cône est dans le domaine d'existence de la fonction, la fonction $Y_{n+1/2}$ doit être rejetée.

Il vient alors :

$$U = \sqrt{\rho}\; Z_{n+1/2}(k\rho)\; P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} m\phi\; e^{j\omega t} \qquad (11)$$

Les coefficients m et n sont à déterminer d'après les conditions aux limites.

a) Composantes du champ électromagnétique

Les solutions du type E ou TM (transverse magnétique) sont données par :

$$\begin{cases} E_\rho = \dfrac{n(n+1)}{\rho^2}\sqrt{k\rho}\; H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)\; P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\phi & (12)\\[2ex] E_\theta = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left[\sqrt{k\rho}\; H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)\right]\dfrac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\phi) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\phi & (13)\\[2ex] E_\phi = \dfrac{m}{\rho\sin\theta}\dfrac{d}{d\rho}\left[\sqrt{k\rho}\; H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)\right] P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} m\phi & (14) \end{cases}$$

.../.

$$\begin{cases} H\rho = 0 \\ H_\theta = j \dfrac{km}{\rho \sin\theta} \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{k\rho}\; H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)\, P^m_n(\cos\theta) \begin{matrix}\cos \\ -\sin\end{matrix} m\phi & (15) \\ H_\phi = -j \dfrac{k}{\rho} \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{k\rho}\; H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho) \dfrac{d}{d\theta} P^m_n(\cos\theta) \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} m\phi & (16) \end{cases}$$

Les solutions du type H ou TE (tranverse électrique) sont données par :

$$\begin{cases} E\rho = 0 \\ E_\theta = -j \dfrac{km}{\rho \sin\theta} \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{k\rho}\; H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)\, P^m_n(\cos\theta) & (12') \\ E_\phi = j \dfrac{k}{\rho} \dfrac{\mu}{\varepsilon} k\rho\; H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho) \dfrac{d}{d\theta}\left[P^m_n(\cos\theta)\right] & (13') \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_\rho = \dfrac{n(n+1)}{\rho^2} \sqrt{k\rho}\; H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)\, P^m_n(\cos\theta) & (14') \\ H_\theta = \dfrac{1}{\rho} \dfrac{d}{d\rho}\left[\sqrt{k\rho}\; H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)\right] \dfrac{d}{d\theta}\left[P^m_n(\cos\theta)\right] & (15') \\ H_\phi = \dfrac{m}{\rho \sin\theta} \dfrac{d}{d\rho}\left[\sqrt{k\rho}\; H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)\right] P^m_n(\cos\theta) & (16') \end{cases}$$

Dans le cas de propagation vers le sommet du cône les équations sont identiques mais la fonction $H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)$ est remplacée par la fonction $H^{(1)}_{n+1/2}(k\rho)$.

b) Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont :

$$\left.\begin{matrix} E \text{ (tangentiel)} = 0 \\ H \text{ (normal)} = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{sur les parois du cône} \qquad (17)$$

C'est à dire :

$$(E_\rho)_{\theta=\theta_o} = 0$$

$$(E_\phi)_{\theta=\theta_o} = 0$$

$$(H_\theta)_{\theta=\theta_o} = 0.$$

.../.

On a donc :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_{\theta = \theta_o} = 0 \text{ pour les solutions du type TE,}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_{\theta = \theta_o} = \left(\frac{\partial U}{\partial \phi}\right)_{\theta = \theta_o} = 0 \text{ pour les solutions du type TM.}$$

c) Impédance d'onde

L'impédance d'onde est définie par :

$$Z = - \frac{E_\phi}{H_\phi} \qquad (18)$$

$$Z(\text{modes H}) = Z_H = - j \frac{k \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{k\rho}\ H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)}{\frac{d}{d\rho}\left[\sqrt{k\rho}\ H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)\right]} \qquad (19)$$

On remarque que l'impédance d'onde pour z croissant (c'est à dire propagation du sommet vers l'extérieur, fait intervenir la fonction $H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)$ et celle de z décroissant (propagation vers le sommet du cône) $H^{(2)}_{n+1/2}(k\rho)$.

On a donc :

$$\left[Z_E(\rho)\right]_{z \text{ croissant}} = \left[Z_E(\rho)\right]^*_{z \text{ décroissant}} \qquad (20)$$

$$\left[Z_H(\rho)\right]_{z \text{ croissant}} = \left[Z_H(\rho)\right]^*_{z \text{ décroissant}} \qquad (21)$$

$$Z_E(\rho) = \frac{j}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}} \left[\frac{-n}{k\rho} + \frac{H_{n-1/2}(k\rho)}{H_{n+1/2}(k\rho)}\right] \qquad (22)$$

$$Z_H(\rho) = - j \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{1}{\frac{-n}{k\rho} + \frac{H_{n-1/2}(k\rho)}{H_{n+1/2}(k\rho)}}\right] \qquad (23)$$

.../.

d) Simplification dans le cas des petits angles

Dans le cas où θ est petit tel que
$\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$,

P_n^m peut être remplacé par l'expression approchée

$$P_n^m (\cos \theta) \approx J_m \left(\sqrt{n(n+1)}\ \theta \right) \qquad (24)$$

On a alors $J_m \left(\sqrt{n(n+1)}\ \theta_o \right) = 0$ pour les modes TM

soit : $$\sqrt{n(n+1)}\ \theta_o = X_{m1} \qquad (25)$$

d'où $$n = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{X_{m1}}{\theta_o} \right)^2}^{\,2} \qquad (26)$$

avec X_{m1} = 1 ième zéro de la fonction $J'_m (x) = 0$

On a, pour les modes TE, $$J'_m \left(\sqrt{n(n+1)}\ \theta_o \right) = 0 \qquad (27)$$

soit $$n = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{X'_{m1}}{\theta_o} \right)^2} \qquad (28)$$

avec X'_{m1} = 1 ième zéro de la fonction $J'_m (x) = 0$

2. Propagation dans une transition

Considérons deux guides circulaires réunis par une transition de révolution et de profil quelconque comme le montre la figure 2, et une onde se propageant suivant un mode donné.

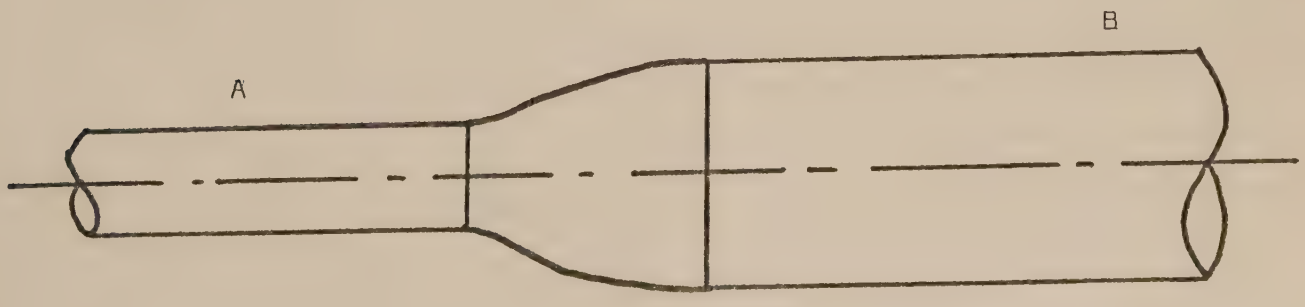


FIGURE 2

Au niveau de la transition, des modes d'ordres supérieurs, liés à la structure du mode fondamental, sont excités. Le tableau ci-dessous résume les différents cas possibles :

Onde incidente	Onde réfléchie et transmise
TE_{ON}	$\sum_n TE_{on}$
TM_{ON}	$\sum_n TM_{on}$
TE_{MN}	$\sum_n TE_{Mn} + \sum_n TM_{Mn}$
TM_{MN}	$\sum_n TM_{Mn} + \sum_n TE_{Mn}$

a) Propagation dans une transition conique

Considérons tout d'abord le cas où la transition est tronconique (les génératrices sont des droites). La propagation dans ce cas est définie par :

- Les équations 12 à 16 mode TM (ou 12' à 16' mode TE)

- Les conditions de raccordement du champ que nous allons examiner.

Considérons à cet effet le cas général de raccordement entre deux cônes d'angles d'ouvertures petits θ_1 et θ_2 comme l'indique la figure 3. Le cas du raccordement d'un guide circulaire à une transition conique s'en déduit aisément en posant θ_1 ou θ_2 égal à zéro.

.../.

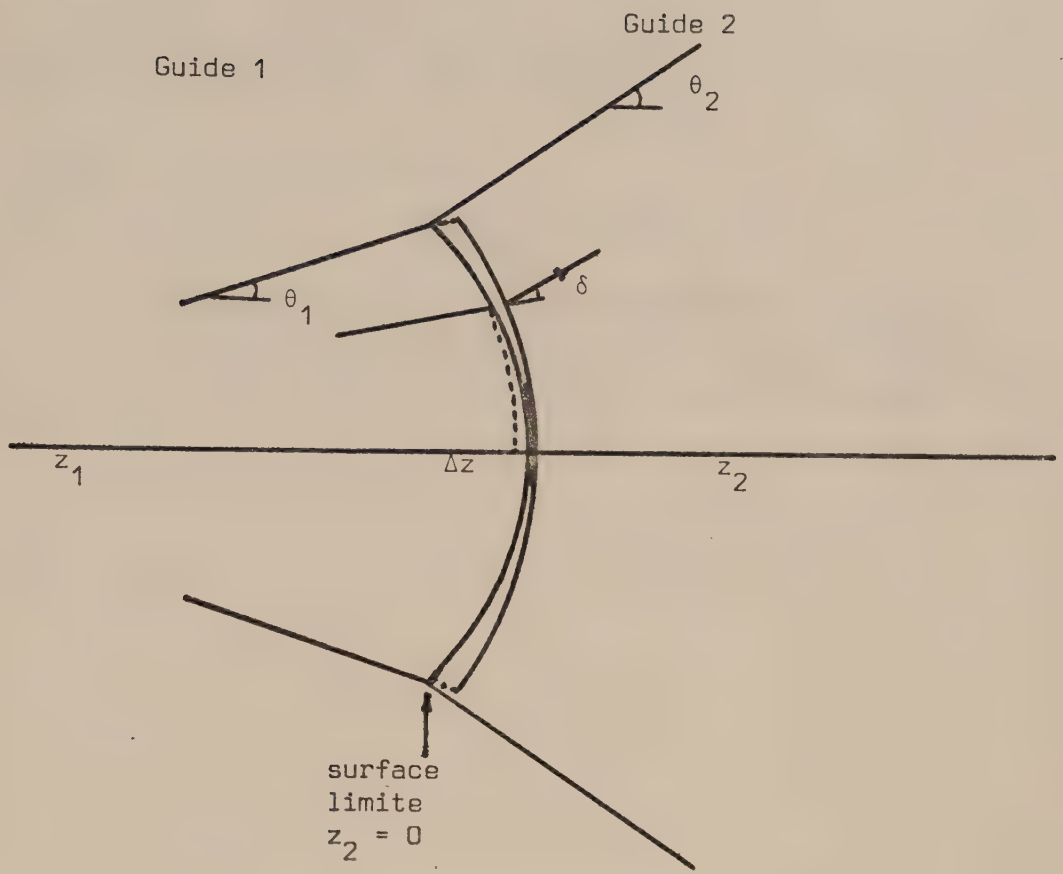


FIGURE 3

La section sphérique transversale $z_2 = 0$ est prise comme surface limite. L'onde incidente est en avance de phase de :

$$\Delta z_1 = \frac{z_1 \theta_1}{2} \left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2 (\theta_2 - \theta_1) \qquad (29)$$

Il en résulte une diffraction δ de valeur :

$$\delta = - z_1 \theta (\theta_2 - \theta_1) = - z_1 \theta \Delta\theta \qquad (30)$$

.../.

Il vient alors pour les conditions aux limites :

$$\begin{cases} E_{t2}(z_2=0) = E_{t1}(z_1=-\Delta z) - r_o \sin(z_1 \theta \Delta\theta) E_{z1}(z_1 = -\Delta z) & (31) \\ H_{t2}(z_2=0) = H_{t1}(z_1 = -\Delta z) - r_o \sin(z_1 \theta \Delta\theta) H_{z1}(z_1 = -\Delta z) & (32) \end{cases}$$

où l'indice t signifie tangentiel

et où r_o est le vecteur unitaire dans la direction de r.

b) Propagation dans une transition à profil quelconque

Considérons maintenant la propagation suivant oz dans une transition de révolution à profil quelconque (figure 4), dont les dérivées de l'équation du profil sont nulles aux deux extrêmités.

Ecrivons ces conditions

$$\frac{da(z)}{dz} = 0 \qquad \begin{cases} a = a_1 \\ a = a_2 \end{cases}$$

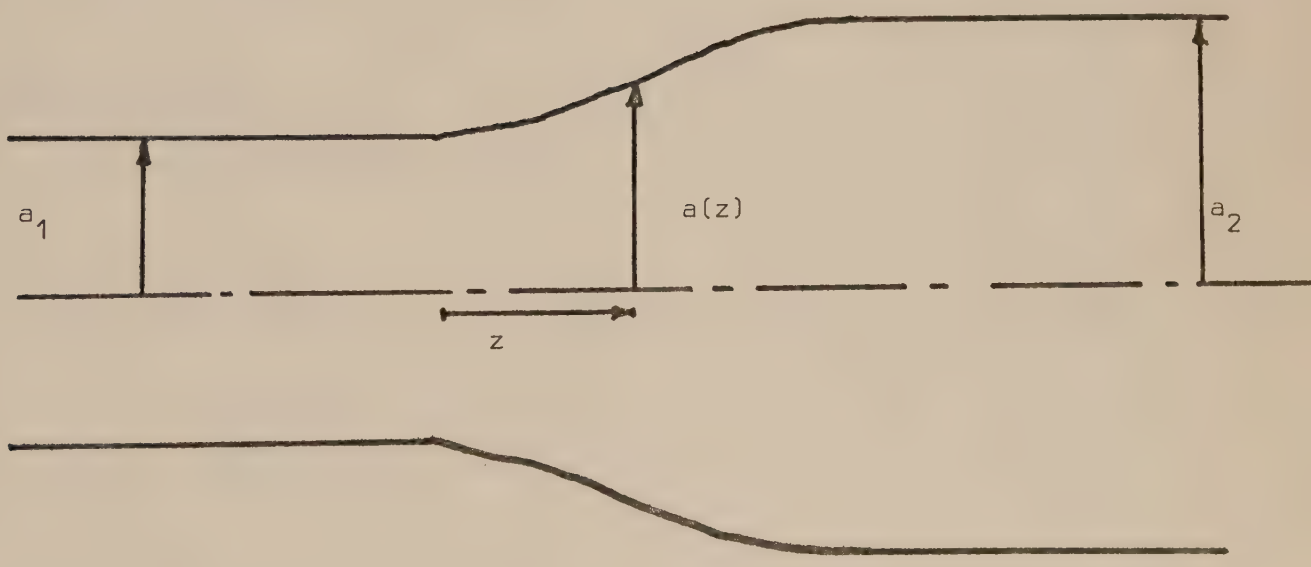


FIGURE 4

.../.

Il est plus aisé d'aborder le problème en utilisant les équations des télégraphistes généralisées (conversion des équations de MAXWELL par SCHELKUNOFF).

En tout point de la transition le champ est représenté par la superposition des modes orthonormés du guide circulaire ayant le même diamètre.

Modes du type TE :

$$\begin{cases} E_r = \sum_m V_m \frac{m}{r} \dfrac{J_N(x_m\, r/a)}{\sqrt{\pi}\, a\, J'_N(x_m)} \dfrac{a}{x_m} \sin m\theta & (33) \\ E_\theta = \sum_m V_m \dfrac{J'_N(x_m\, r/a)}{\sqrt{\pi}\, a\, J'_N(x_m)} \cos m\theta & (34) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_r = -\sum_m I_m \dfrac{J'_N(x_m\, r/a)}{\sqrt{\pi}\, a\, J'_a(x_m)} \cos m\theta & (35) \\ H_\theta = \sum_m I_m \frac{m}{r} \dfrac{J_N(x_m\, r/a)}{\sqrt{\pi}\, a\, J'_N(x_m)} \dfrac{a}{x_m} \sin m\theta & (36) \\ H_z = \sum_m i_m \dfrac{J'_N(x_m\, r/a)}{\sqrt{\pi}\, a\, J'_N(x_m)} \cos m\theta & (37) \end{cases}$$

Modes du type TM :

$$\begin{cases} E_r = -\sum_m V_m \dfrac{J'_N(x_m\, r/a)}{\sqrt{\pi}\, a\, J'_N(x_m)} \cos m\theta & (33') \\ E_\theta = \sum_m V_m \frac{m}{r} \dfrac{J_N(x_m\, r/a)}{\sqrt{\pi}\, a\, J'_N(x_m)} \dfrac{a}{x_m} \sin \theta & (34') \\ E_z = \sum_m V_m \dfrac{J'_N(x_m\, r/a)}{\sqrt{\pi}\, a\, J'_N(x_m)} & (35') \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_r = \sum_m I_m \frac{m}{r} \dfrac{J_N(x_m\, r/a)}{\sqrt{\pi}\, a\, J'_N(x_m)} \dfrac{a}{x_m} \sin m\theta & (36') \\ H_\theta = \sum_m I_m \dfrac{J'_N(x_m\, r/a)}{\sqrt{\pi}\, a\, J'_N(x_m)} \cos m\theta & (37') \\ H_z = 0 \end{cases}$$

.../.

- J_N représente les fonctions de Bessel de première espèce et J'_N leurs dérivées
- x_m est la m ième racine de $J_N(x) = 0$
- V_m, I_m et i_m ont les dimensions de tension et de courant et sont reliés par la relation suivante :

$$P_m = \frac{1}{2} \quad (V_m \; I_m^*)$$

Les équations de MAXWELL en coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial z} = j \omega \mu H_r \tag{38}$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} = j \omega \varepsilon E_\theta + \frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) = - j \omega \mu r H_z \tag{40}$$

Pour trouver la relation entre V_m et i_m il suffit de substituer, dans le cas des modes TE les équations (34) et (40) dans la relation (37) Ceci conduit à :

$$i_m = j \frac{X_m}{\omega \mu a} V_m \tag{41}$$

Pour les modes de type TM on obtiendrait de même :

$$v_m = - j \frac{\omega \mu a}{X_m} I_m \tag{41'}$$

Afin de convertir les équations de MAXWELL, en équations des télégraphistes généralisés on introduit, pour les modes TE, les relations 33, 34, 35 et 36 dans les relations 38 et 39, on multiplie les deux membres des équations par $J_N (x_m \; r/a)$ et on intégre sur la section, on obtient alors :

$$\frac{dV_n}{dz} = j \omega \mu \; I_n + \frac{1}{a} \; \frac{da}{dz} \; \sum_{m} \; \frac{2 X_n X_m}{X_m^2 - X_n^2} \; V_m \tag{42}$$

$$m \neq n$$

.../. .

Pour les modes de type TM, on obtiendrait de même :

$$\frac{dV_n}{dz} = - \frac{\gamma^2}{j\omega\varepsilon} I_n - \frac{1}{a}\frac{da}{dz} \sum_m \frac{2 X_n X_m}{X_m^2 - X_n^2} V_m \qquad (42')$$

$$\frac{dI_n}{dz} = - j\omega\varepsilon V_n + \frac{1}{a}\frac{da}{dz} \sum_m \frac{2 X_n X_m}{X_m^2 - X_n^2} I_n \qquad (43')$$

Une fois le profil de la transition choisi, les amplitudes relatives des différents modes peuvent ainsi se calculer à partir de ces équations.

III - REFLEXION TOTALE DANS UNE TRANSITION

1 - Transition conique

Considérons l'incidence sur une transition conique d'un mode qui se propage du guide B vers le guide A (cf. Figure 5).

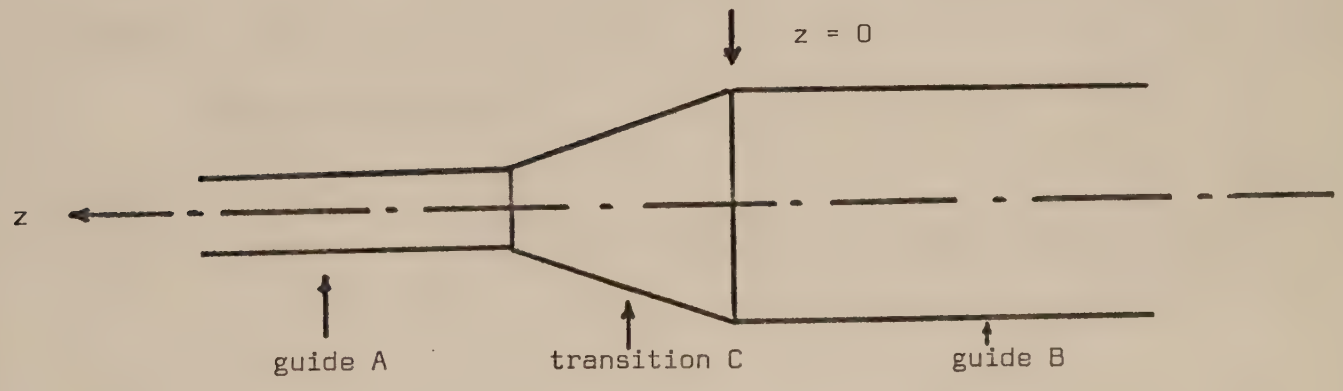


FIGURE 5

La transition excite des modes supérieurs (II.2). Les différents cas de mode incident se traitent de manière très semblable. Nous allons donc traiter plus en détail l'un d'entre eux. Nous indiquerons après comment les résultats se modifient dans un autre cas.

.../.

a) Incidence d'un mode TM_{01}

Dans le cas où l'onde incidente est en mode TM_{01}, alors seuls les modes TM_{on} sont engendrés.

- Modes en guide B

$$\begin{cases} \dfrac{E_\rho^{(B)}}{E_o} = y_1 \dfrac{Z_1^{(B)}}{Z_o} J_o'(y_1 \rho/b)\, e^{-j\beta_1^{(B)} z} + \sum_n r_n \dfrac{Z_n^{(B)}}{Z_o} y_n J_o'(\rho/b) e^{j\beta_n^{(B)} z} \\ \dfrac{E_z^{(B)}}{E_o} = \dfrac{j}{\beta_o b} \left\{ y_1^2 J_o(y_1 \rho/b) e^{-j\beta_1^{(B)} z} + \sum_n r_n y_n^2 J_o(y_n \rho/b) e^{j\beta_n^{(B)} z} \right\} \\ \dfrac{H_\phi}{H_o} = y_1 J_o'(y_1 \rho/b)\, e^{-j\beta_1^{(B)} z} - \sum_n r_n y_n J_o'(y \rho/b)\, e^{j\beta_n^{(B)} z} \end{cases} \quad (44)$$

$$E_\phi^{(B)} = H_\rho^{(B)} = H_z^{(B)} = 0$$

avec n = 1,2, 3, 4, 5 .....

- Modes en transition C

$$\frac{E_\theta^{(C)}}{E_o} = \frac{b}{\theta_o r Z_o} \sum_p y_p J_o'\left(y_p \frac{\theta}{\theta_o}\right) \sqrt{\beta_o r} \left\{ Z_p^{(C)} d_p H_\eta^{(1)}(\beta_o r) + Z_p^{(C)} \omega_p H_\eta^{(2)}(\beta_o r) \right\}$$

$$\frac{E_r^{(C)}}{E_o} = \frac{j\beta_o b}{(\theta_o \beta_o r)^2} \sum_p y_p^2 J_o\left(y_p \frac{\theta}{\theta_o}\right) \sqrt{\beta_o r} \left\{ d_p H_\eta^{(1)}(\beta_o r) + \omega_p H_\eta^{(2)}(\beta_o r) \right\} \quad (45)$$

$$\frac{H_\phi^{(C)}}{H_o} = \frac{b}{\theta_o r} \sum_p y_p J_o'\left(y_p \frac{\theta}{\theta_o}\right) \sqrt{\beta_o r} \left\{ d_p H_\eta^{(1)}(\beta_o r) - \omega_p H_\eta^{(2)}(\beta_o r) \right\}$$

p = 1,2,3, ...

.../.

- Modes en guide A

$$\frac{E_\rho^{(A)}}{E_o} = \frac{a}{b} \sum_q t_q \frac{Z_n^{(A)}}{Z_o} y_q J_o'(y_q \rho/a)\, e^{-j\beta_q^{(A)} z}$$

$$\frac{E_z^{(A)}}{E_o} = \frac{a}{b} \sum_q t_q \frac{j}{\beta_o a} y_q^2 J_o(y_q \rho/a)\, e^{-j\beta_q^{(A)} z} \qquad (46)$$

$$\frac{H_\phi}{H_o} = \frac{a}{b} \sum_q t_q y_q J_o'(y_q \rho/a)\, e^{-j\beta_q^{(A)} z}$$

Les amplitudes relatives des différents modes s'obtiennent en multipliant par $\rho J_o(y_n \rho/a)$ et en intégrant sur la section. Les intégrales obtenues sont des intégrales de LOMMEL qui relient les propriétés d'orthogonalité des fonctions de Bessel. Dans le cas où surl le mode TM_{01} peut se propager dans les guides A et B à l'exclusion de tout autre mode du type TM_{on}, le coefficient de réflexion au point z = O (cf figure 5) est :

$$\left(\frac{\left[\underline{z}^C(R_o) - Z^B\right]\left[Z^A - \underline{z}^C(r_o)\right] H_\eta^{(2)}(\beta_o r_o)\, H_\eta^{(1)}(\beta_o r_o) + \left[Z^A - \underline{z}^C(r_o)\right]\left[\underline{z}^C(R_o) + Z^B\right] H_\eta^{(1)}(\beta_o r_o) H_\eta^{(2)}(\beta_o r_o)}{\left[\underline{z}^C(R_o) + Z^B\right]\left[Z^A - \underline{z}^C(r_o)\right] H_\eta^{(2)}(\beta_o r_o)\, H_\eta^{(1)}(\beta_o r_o) + \left[Z^A - \underline{z}^C(r_o)\right]\left[\underline{z}^C(R_o) - Z^B\right] H_\eta^{(1)}(\beta_o r_o) H_\eta^{(2)}(\beta_o r_o)} \right)$$

$$e^{+ jx\beta^C \theta_o B} \qquad (47)$$

avec

Z^A = impédance d'onde dans le guide A pour le mode TM_{01}

Z^B = impédance d'onde dans le guide B pour le mode TM_{01}

$\underline{z}^C(r)$ = impédance d'onde dans la transition tronconique pour le mode TM_{01} propagation vers le sommet

$Z^C(r)$ = impédance d'onde dans la transition tronconique pour le mode TM_{01}, propagation vers l'extérieur.

x est un facteur qui tient compte de la courbure de la surface de raccordement et qui peut être pris $\simeq$ 0,67.

.../.

Considérons alors la propagation du mode TM_{01} à travers l'ensemble représenté figure 5 et choisissons les diamètres des guides circulaires A et B de façon que le mode TM_{01} ne puisse se propager que dans le guide B. A une fréquence donnée une onde se propageant dans un tel mode de B vers A va se réfléchir dans la transition et un régime d'ondes stationnaires va s'établir dans le guide circulaire B. Aux minimums de champ électrique correspondent les maximums de champ magnétique trasverse. Ceci est équivalent à la propagation d'une onde dans un guide circulaire terminé par un court-circuit. Par extension, on appellera "plan de court-circuit dans la transition" l'endroit où l'on observe le premier maximum de champ magnétique transversal à l'intérieur de la transition. Ainsi pour une bande de fréquences donnée on observe dans le guide circulaire B une variation du plan de court-circuit due à la fréquence en fonction du profil de la transition conique.

b) Formule approchée du plan de court circuit dans la transition

Afin de trouver une formule approchée, mais simple, on négligera l'effet de guide de diamètre A (guide à la coupure) ainsi que le problème de la surface limite entre transition et guide. Cela revient à considérer la transition comme si elle était un cône entier. L'équation 16 donne le champ magnétique transversal H_ϕ dans le cas d'un mode TM, et en particulier pour le mode TM_{01}:

$$H_\phi \alpha \frac{1}{\sqrt{\rho}} H_N(k\rho) \quad \text{où} \qquad (48)$$

H_N est la fonction de HANKEL.

Or, comme nous l'avons vu en I, la solution $H_N(k\rho)$ se réduit à $J_N(k\rho)$ si le sommet du cône est dans le domaine de l'existence de la fonction. Ainsi H_ϕ s'annule au sommet du cône et H_ϕ total (incident plus réfléchi) sera ainsi proportionnel à :

$$H_\phi \text{ total} \alpha \frac{1}{\sqrt{\rho}} J_N(k\rho) \qquad (49)$$

Donc à une fréquence donnée, l'onde dans le cône qui est en régime d'onde stationnaire, aura en première approximation l'allure de la fonction de Bessel $J_N(k\rho)$ à $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ près. La figure 14 représente le profil du champ magnétique approché dans le cône. En guide circulaire le champ magnétique prend la forme d'oscillations sinusoïdales.

.../.

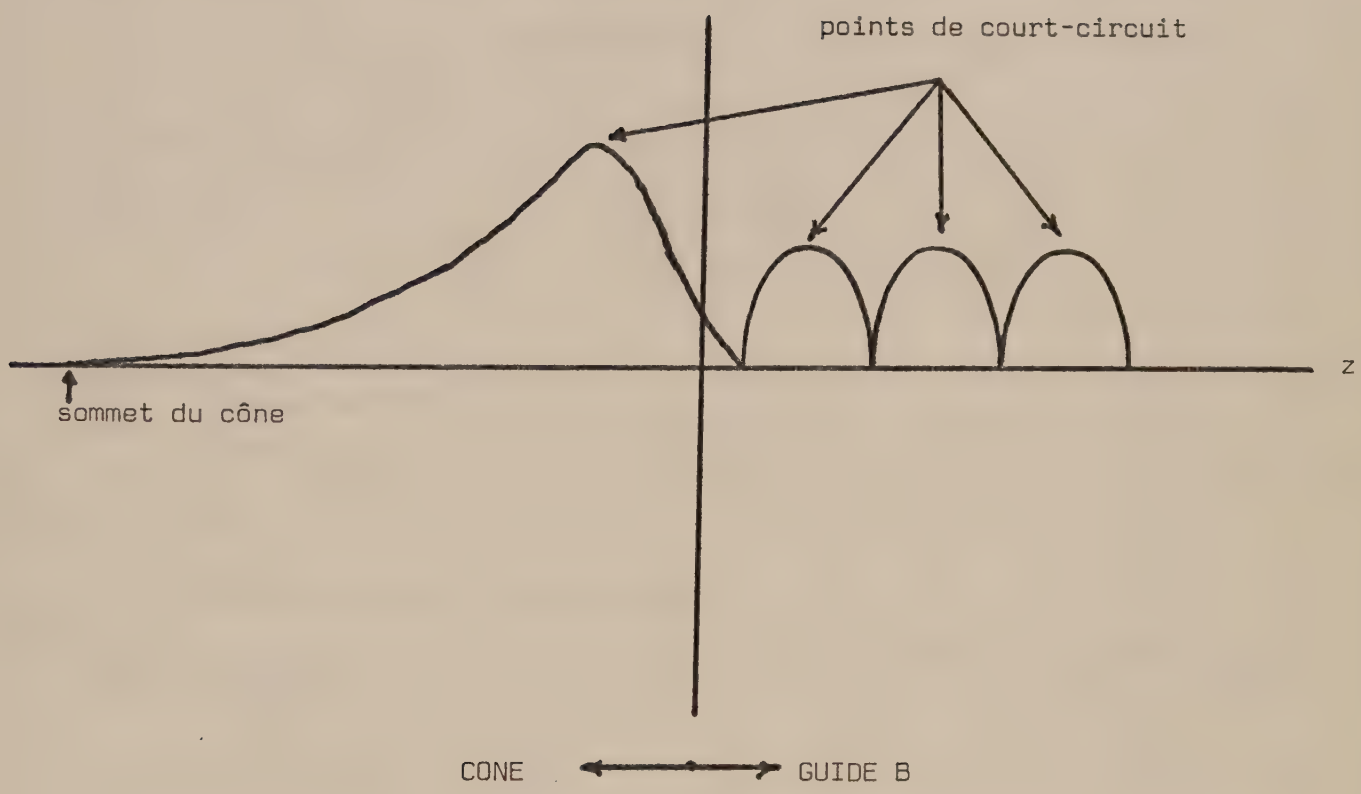


FIGURE 6 : Profil approché du champ magnétique transversal en cône et en guide.

Les points de court-circuit sont ceux où H_ϕ est maximal.

Or $H_\phi \alpha J_N(k\rho)$ et le maximum de H_ϕ a lieu quand sa dérivée par rapport à ρ s'annule. Donc le premier "plan de court-circuit" correspond au premier zéro de $J_N(k\rho) = 0$. L'argument du premier zéro de $J'_N(k\rho)$ est donnée par :

$$k\vec{\rho} = N + 0{,}8086165\, N^{1/3} + 0{,}07249\, N^{-1/3} + \ldots\ldots \quad (50)$$

$$k\rho \neq N + 0{,}8 \sqrt[3]{N} \quad (51)$$

.../.

d'où

$$\rho = \frac{N + 0{,}8\sqrt[3]{N}}{k} \qquad (52)$$

L'équation 52 donne le "plan de court-circuit" en fonction de ρ. Pour l'obtenir en fonction de z il suffit de faire le changement suivant :

$$z = \rho_o - \rho = \frac{B}{\theta_o} - \frac{N + 0{,}8\sqrt[3]{N}}{k} \qquad (53)$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$z = \frac{B}{\theta_o} - \frac{15\left(\frac{y}{\theta_o} + 0{,}8\sqrt{\frac{y}{\theta_o}}\right)}{\pi f} \qquad (54)$$

B et z en Cm.

f la fréquence en GHz.

θ_o le demi-angle d'ouverture en radian

y = 2,405

c) plan de court-circuit apparent

Du point de vue pratique tout se passe comme si le guide B était court-circuité dans un plan qu'on appellera plan de court-circuit apparent.

Dans le guide d'onde B en régime d'onde stationnaire pure le coefficient de réflexion du mode TM_{01} est toujours donné par l'équation (47) qui peut alors se mettre sous la forme :

$$(R_o)_{z=0} = e^{j\phi} \qquad (55)$$

Les plans de "court-circuit apparents" sont les lieux où R = - 1

C'est à dire

$$R = e^{j\pi (1 + 2k)} \qquad (56)$$

avec k = 1,2,3,4 ....

.../.

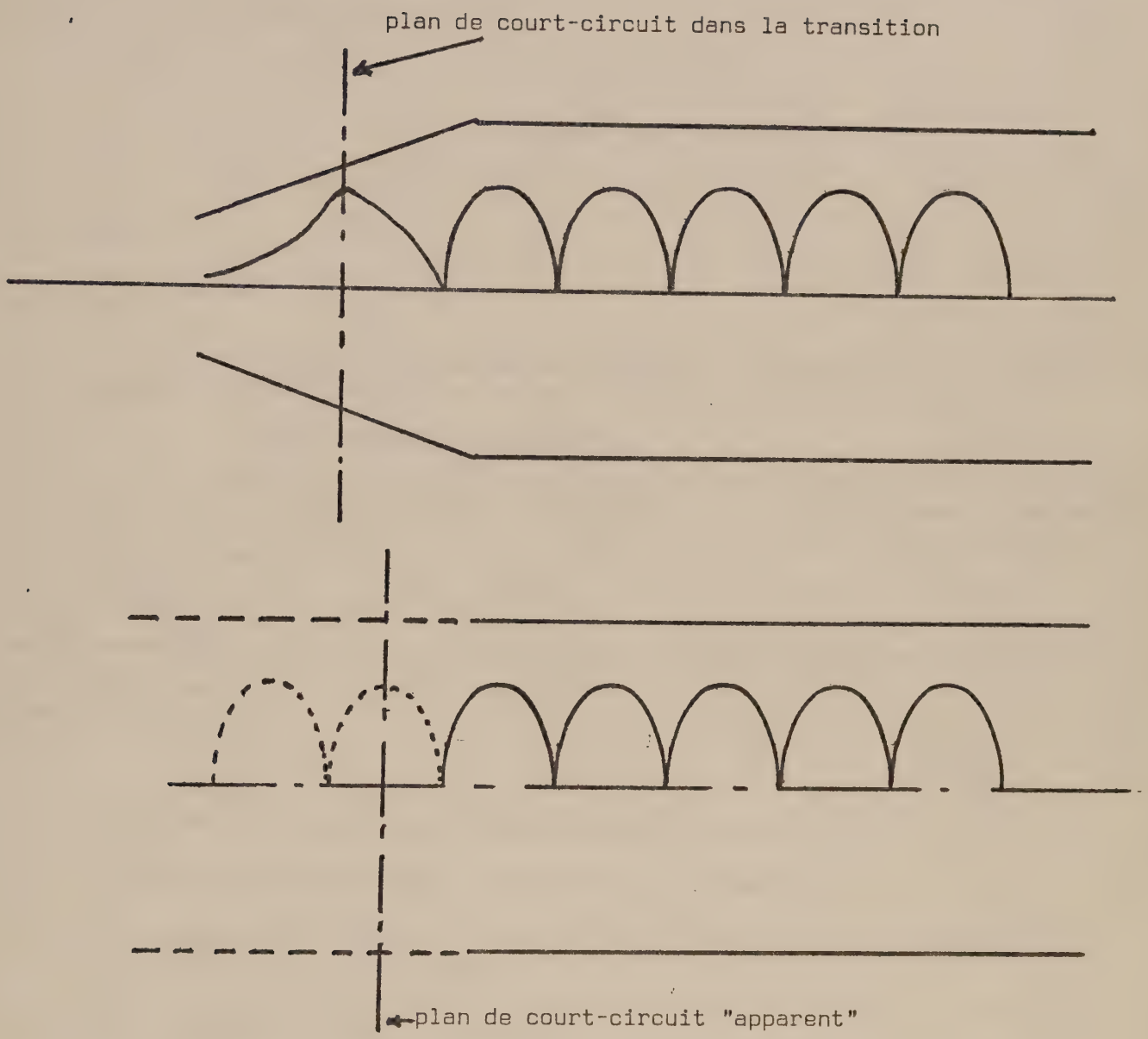

plan de court-circuit dans la transition
plan de court-circuit "apparent"

FIGURE 7

Il vient alors

$$R_o\, e^{2j\beta^{(B)} z_o} = e^{j\pi (1 + 2k)}$$

$$= e^{j\phi}\, e^{2j\beta^{(B)} z_o}$$

$$\phi + 2\pi\beta^{(B)} z_o = \pi (1 + 2k) \qquad (57)$$

D'où

$$z_o = \left(\frac{\pi - \phi}{4\pi} \right) \lambda_g^{(B)} \qquad (58)$$

L'équation (58) donne la position z_o du premier plan de court-circuit apparent (c'est à dire plus proche du cône)

d) onde incidente en mode TE_{21}

Dans le cas d'une transition en réflexion totale avec l'incidence d'une onde TE_{21} on obtient des expressions et des résultats semblables à ceux déjà trouvés pour le mode TM_{01}. En particulier, le coefficient de réflexion est donné par :

$$\left(\frac{\left[1 - \frac{Z^B}{Z^C_{(R_o)}}\right]\left[1 + \frac{Z^A}{Z^C_{(r_o)}}\right] H_\eta^{(2)}(\beta_o r_o) H_\eta^{(1)}(\beta_o r_o) + \left[\frac{Z^A}{Z^C_{(r_o)}} - 1\right]\left[1 + \frac{Z^B}{Z^C_{(r_o)}}\right] H_\eta^{(1)}(\beta_o r_o)\, H_\eta^{(2)}(\beta_o R_o)}{\left[1 + \frac{Z^B}{Z^C_{(R_o)}}\right]\left[1 + \frac{Z^B}{Z^C_{(R_o)}}\right] H_\eta^{(2)}(\beta_o r_o)\, H_\eta^{(1)}(\beta_o r_o) + \left[\frac{Z^A}{Z^C_{(r_o)}} - 1\right]\left[1 - \frac{Z^\theta}{Z^C_{(R_o)}}\right] H_\eta^{(1)}(\beta_o r_o)\, H_\eta^{(2)}(\beta_o r_o)} \right) e^{j\chi\beta^C \theta_o B} \qquad (60)$$

Z^A = impédance d'onde dans le guide A pour le mode TE_{21}

Z^B = impédance d'onde dans le guide B pour le mode TE_{21}

$Z^C_{(r)}$ = impédance d'onde dans la transition tronconique pour le mode TE_{21}, propagation vers le sommet

$Z^C_{(r)}$ = impédance d'onde dans la transition tronconique pour le mode TE_{21}, propagation vers l'extérieur

$\beta^C = \frac{2\pi}{\lambda_g^C}$, λ_g = longueur d'onde guidée en C guide B pour le mode TE_{21}.

χ est un facteur qui tient compte de la courbure de la surface de raccordement qui peut être approximé à 0,67 .

.../.

2 - Transition à profil quelconque

Le problème d'une transition à profil quelconque en réflexion totale peut être abordé d'une façon analogue à celle utilisée avec la transition conique en utilisant les équations 33 à 37 dans le cas d'un mode TE et 33' à 37' dans le cas d'un mode TM pour trouver le"plan de court-circuit". Selon le profil de la transition, le problème ainsi abordé est plus ou moins difficile à résoudre car il fait intervenir des équations différentielles compliquées.

Une autre manière plus simple mais moins précise consiste à assimiler la transition de profil quelconque à une transition conique et à utiliser les formules et résultats déjà trouvés.

IV - CALCUL NUMERIQUE

1 - Programmes utilisés

Les équations trouvées pour déterminer le "plan de court-circuit apparent" font intervenir des fonctions de HANKEL et BESSEL de première et seconde espèce, d'indice réel.

Seules les fonctions de BESSEL de première et seconde espèce $J_N(Z)$ et $Y_N(Z)$, d'indice entier, existent en "Bibliothèque" des programmes pour les calculateurs numériques à notre disposition au CNET : RAMSES II CAE 90/80, BGE 635.

De plus certaines de ces fonctions ne peuvent avoir un indice trop élevé.

Pour nos besoins, nous avons été amené à établir les programmes complets de calcul des fonctions suivantes :

HANK1 (NU,Z) fonction de HANKEL de première espèce,

HANK2 (NU,Z) fonction de HANKEL de deuxième espèce,

BESS1 (NU,Z) fonction de BESSEL de première espèce,

BESS2 (NU,Z) fonction de BESSEL de deuxième espèce,

où NU est l'indice à valeurs réelles, positives ou nulles,

et Z la variable à valeurs réelles, positives ou nulles.

Ces programmes complets sont donnés en annexe.

2 - Résultats obtenus en mode TM_{01}

a) Effet de l'angle d'ouverture de la transition

L'effet de l'angle d'ouverture a été étudié dans l'exemple suivant :

diamètre de guide B : 66,52 mm

diamètre de guide A : 50,00 mm

bande de fréquence : 3,7 - 4,2 GHz.

.../.

Les variations de position des différents plans de court-circuit apparent, correspondant à des demi-angles au sommet allant de 0,03 à 0,1 radian sont montrées figure 8. On remarque que cette variation du"plan de court-circuit apparent" est d'autant plus importante que l'angle d'ouverture est plus petit et que pour des angles de l'ordre d'un dixième de radian les courbes se rapprochent beaucoup d'une horizontale, ce qui est intéressant pour quelques applications comme on le verra plus loin.

b) Effet de la variation du diamètre du guide A

La figure 9 montre l'effet de la variation du diamètre du petit guide A (ce guide restant à la coupure pour le mode TM_{01} dans la bande considérée). On remarque que la variation de ce diamètre influence peu le "plan de court-circuit" vers les hautes fréquences, et qu'elle n'a aucun effet sur les basses fréquences. D'autre part l'effet est d'autant moins important que l'angle est plus petit.

c) Effet de la variation du diamètre du guide B

L'effet de la variation du diamètre du guide B, en gardant l'angle d'ouverture et le diamètre du guide A constants, est montré figure 10. On remarque une translation du "plan de court-circuit" vers l'intérieur de la transition d'autant plus prononcée que l'angle est plus petit.

d) Comparaison plan court-circuit dans la transition - plan court - circuit apparent

La figure 11 montre la variation des plans de court-circuit "apparent" et "dans la transition". On remarque que l'écart entre les deux plans est d'autant plus important que θ_o est plus petit et que la fréquence est plus élevée.

3- Résultats obtenus en mode TE_{21}

La figure 12 montre l'effet de la variation de l'angle d'ouverture sur le "plan de court-circuit apparent" en mode TE_{21}. Ces courbes ressemblent fortement à celles obtenues dans le cas du mode TM_{01}. L'équation (54) qui donne le " plan de court-circuit " dans la transition en mode TM_{01}, s'applique également dans le cas du mode TE_{21} sous réserve de remplacer $y = {}^{01}2{,}405$ par y = 3,054. Mais cette équation donne alors les plans des maximums du champ électrique et les plans de "court-circuit dans la transition" en mode TE_{21} seront donc obtenus en ajoutant $\frac{\lambda g}{4}$ (TE_{21}) à la valeur de z ainsi obtenue.

V - VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

On a cherché à vérifier expérimentalement les résultats obtenus par la théorie, en étudiant plusieurs transitions et en recherchant pour les modes TM_{01} et TE_{21} - les variations du "plan de court-circuit apparent".

.../.

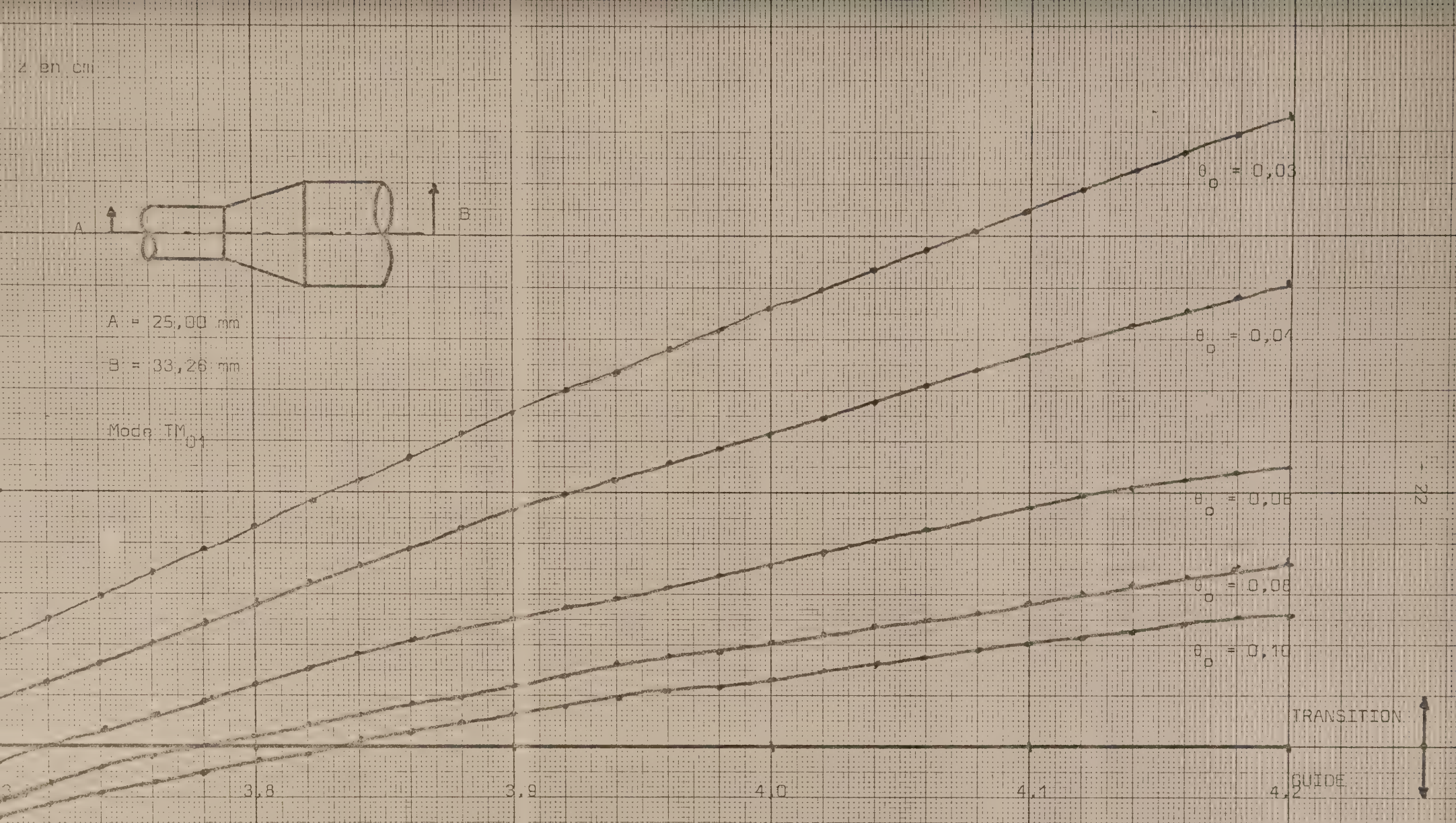


FIGURE 8 : EFFET DE L'ANGLE D'OUVERTURE SUR LA VARIATION DU "PLAN DE COURT-CIRCUIT APPARENT"

LES PAPIERS CANSON France

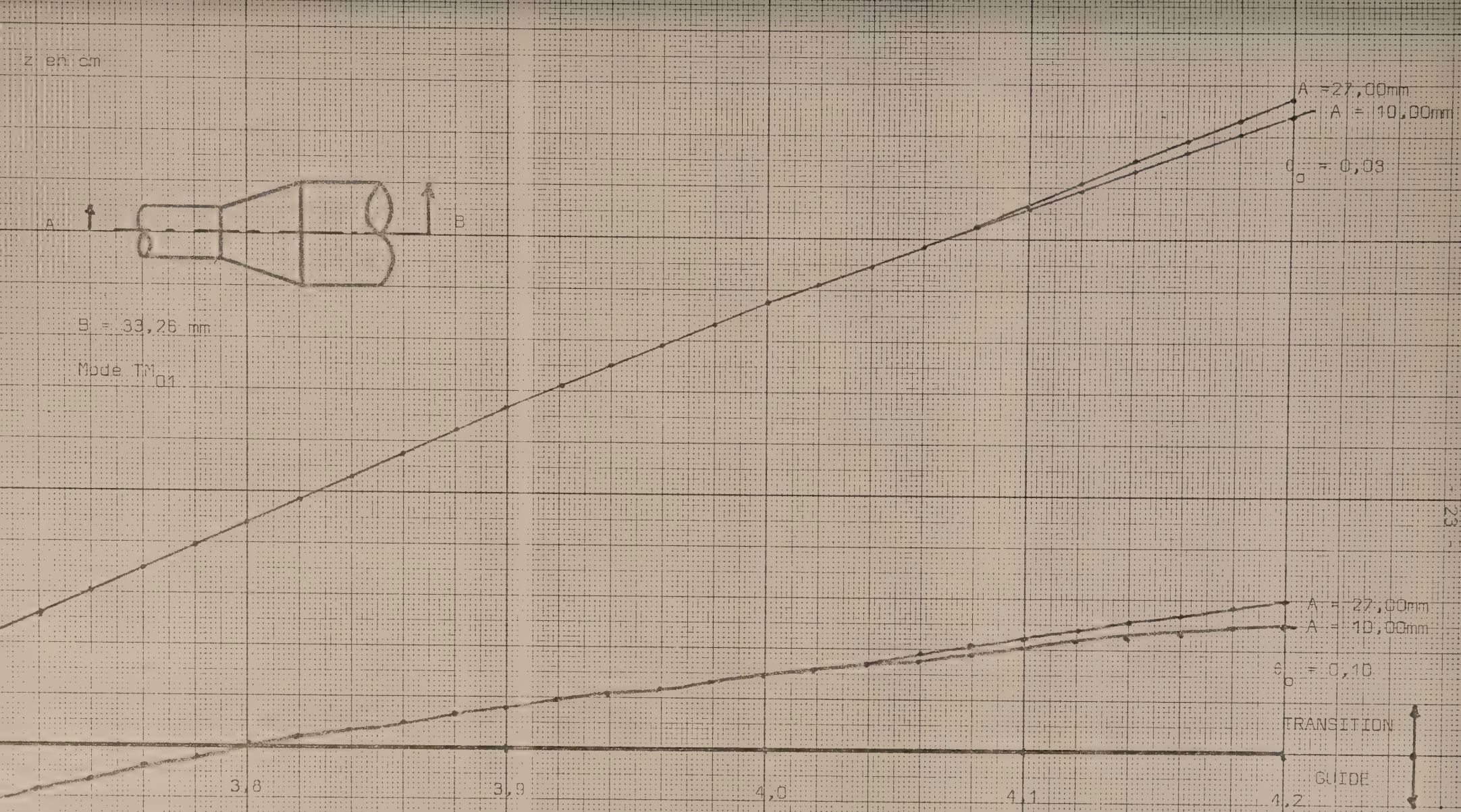


FIGURE 9 : EFFET DE LA VARTATION DU DIAMETRE DU GUIDE A SUR LA VARIATION DU "PLAN DE COURT-CIRCUIT APPARENT"

LES PAPIERS CANSON France

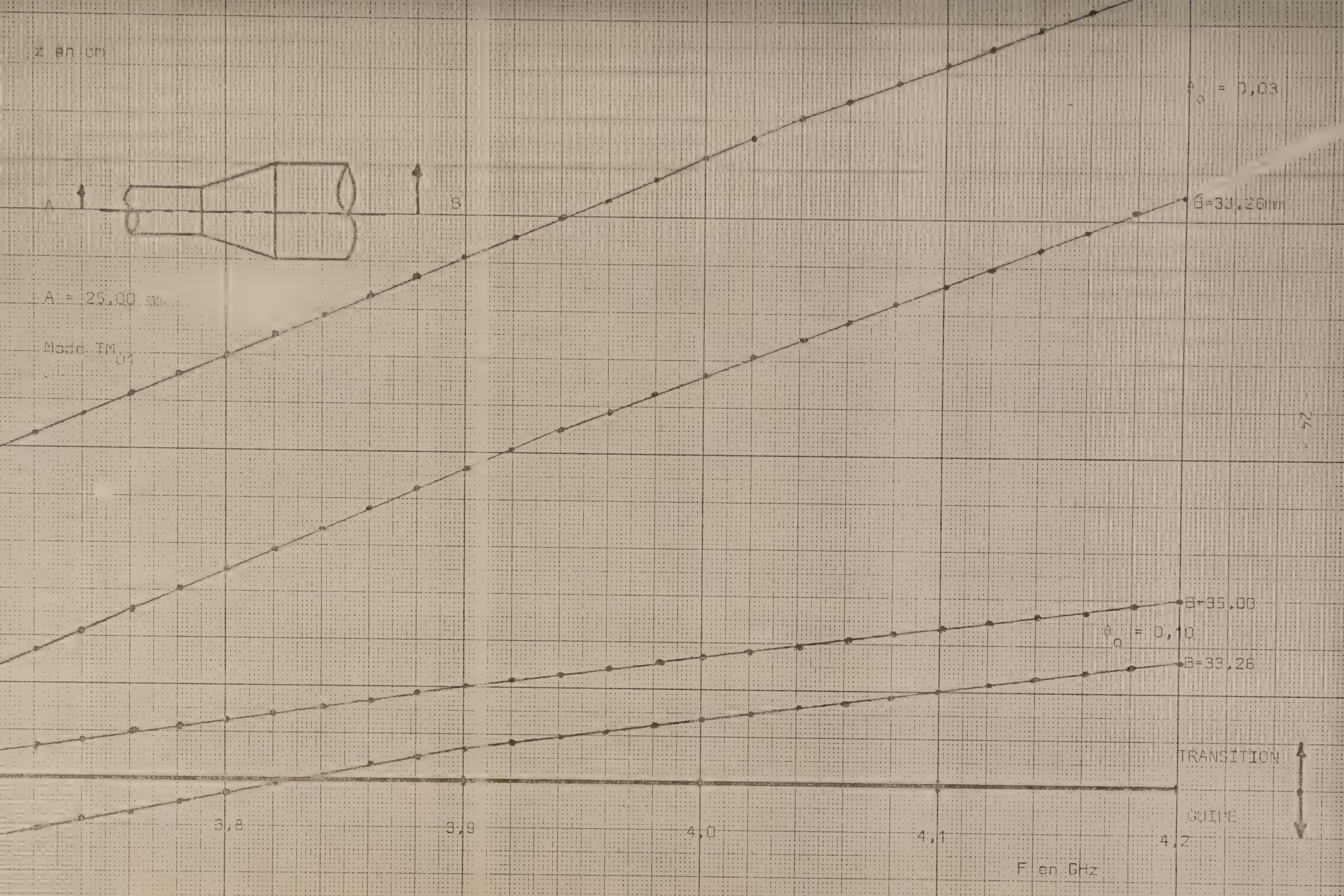


FIGURE 10 : EFFET DE LA VARIATION DU DIAMETRE DU GUIDE B SUR LA VARIATION DU "PLAN DE COURT-CIRCUIT APPARENT"

LES PAPIERS CANSON France

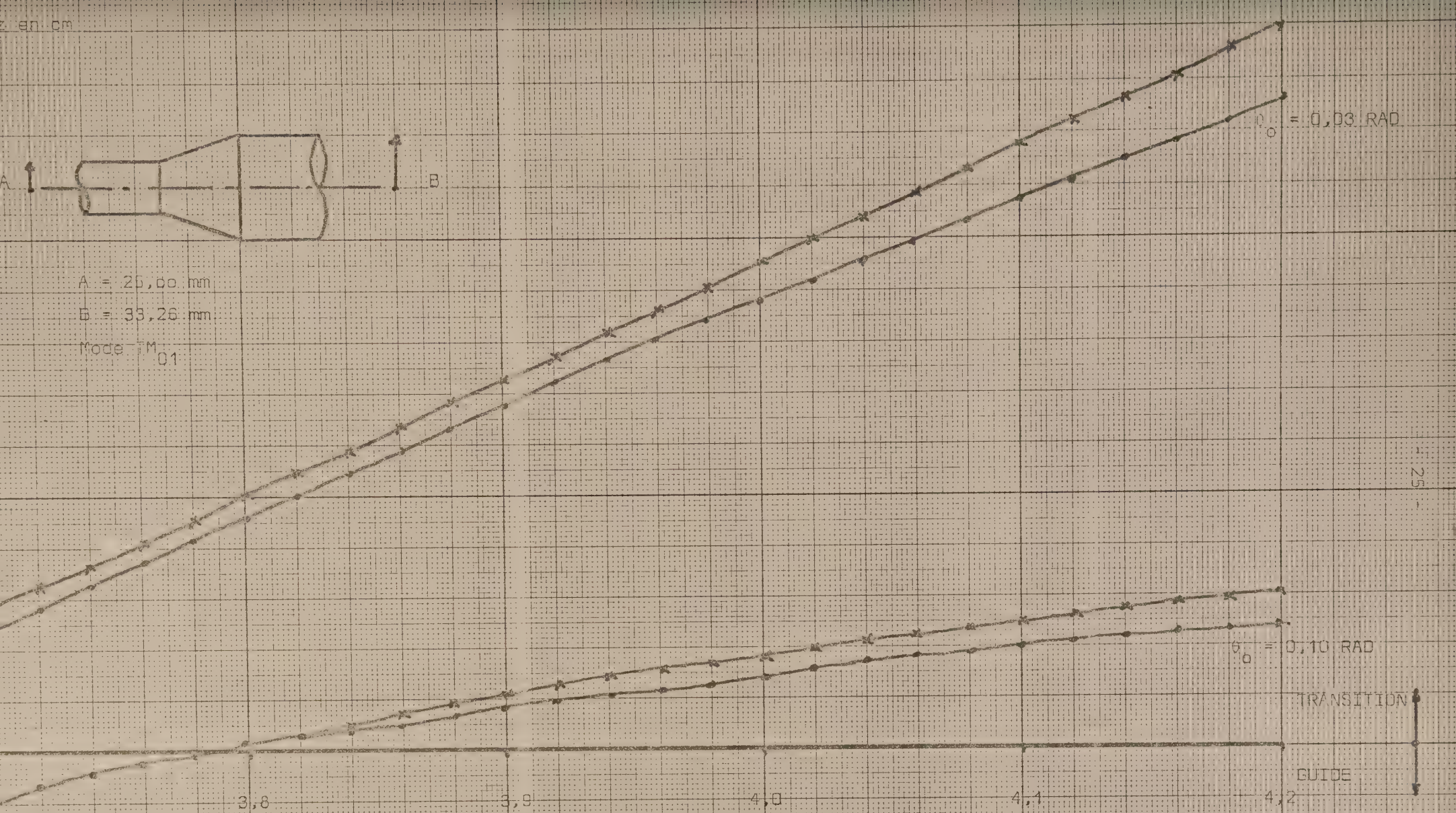


FIGURE 11 : VARIATION DES "PLANS DE COURT-CIRCUIT" A = PLAN DE COURT-CIRCUIT DANS LA TRANSITION

B = PLAN DE COURT-CIRCUIT APPARENT

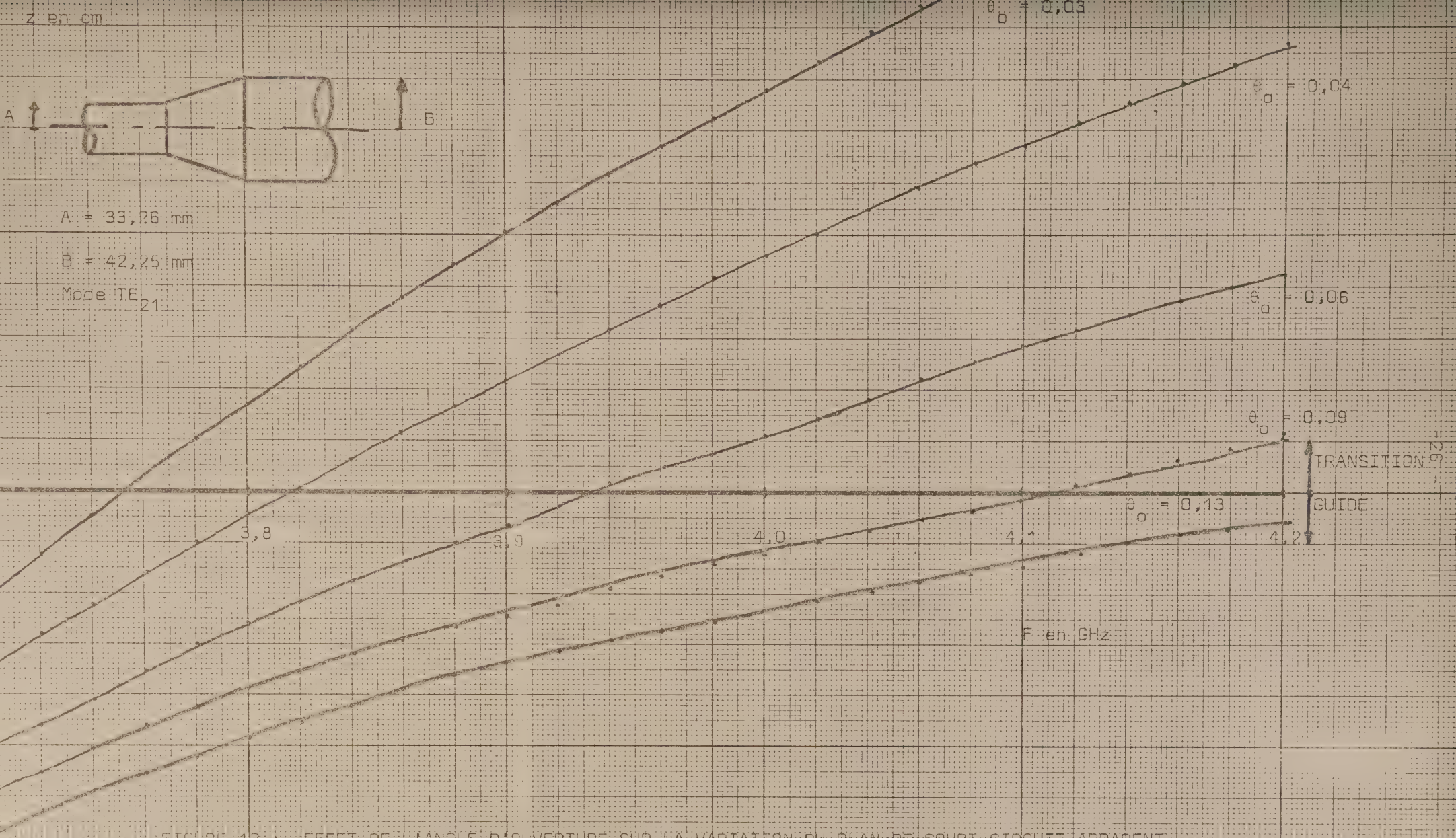


FIGURE 12 : EFFET DE L'ANGLE D'OUVERTURE SUR LA VARIATION DU PLAN DE COURT-CIRCUIT APPARENT

LES PAPIERS CANSON France

1 - Montage de mesure

La figure 13 représente le montage de mesure.

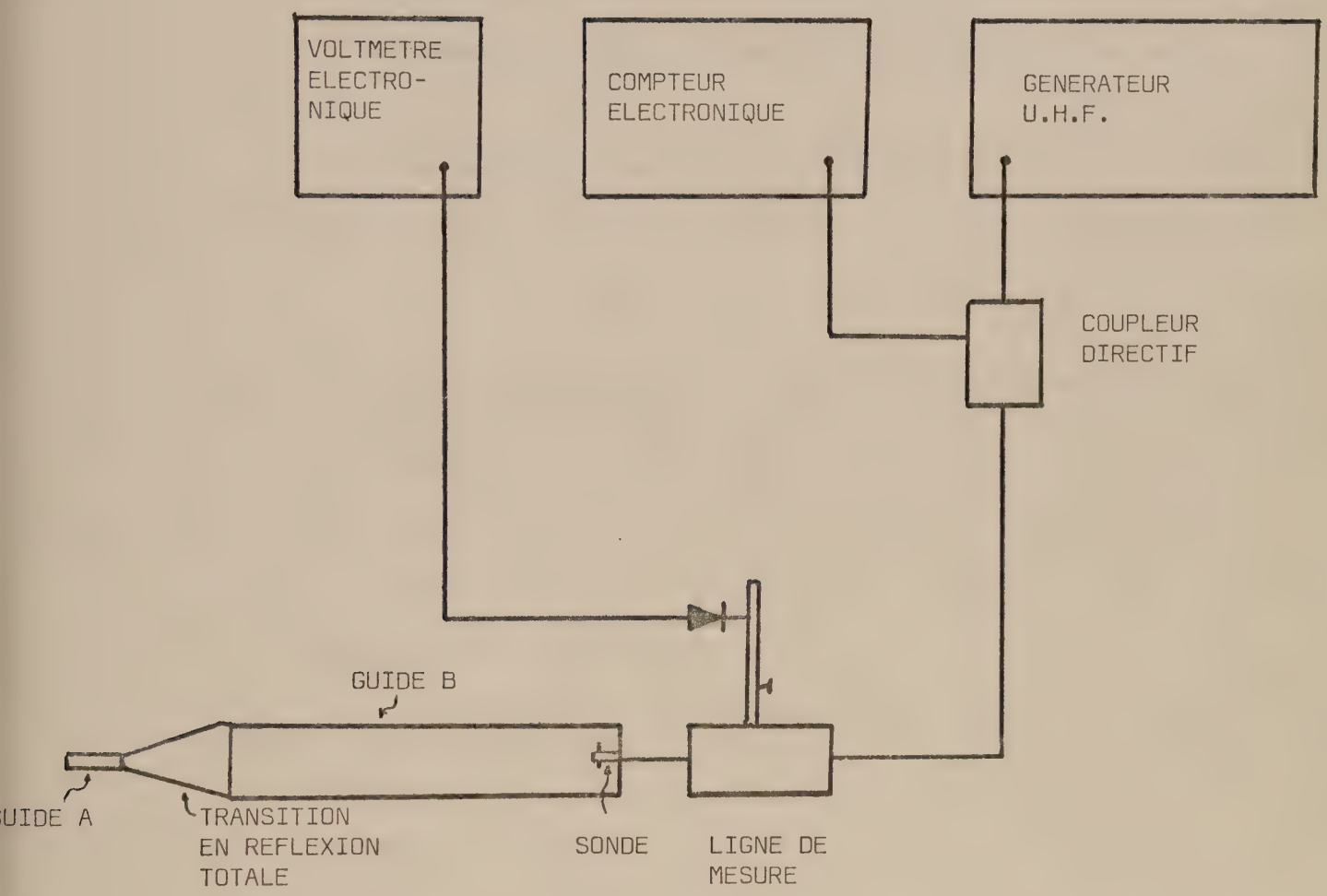


FIGURE 13

Le générateur UHF est suivi d'un coupleur directif 20 dB afin de pouvoir mesurer, à l'aide du compteur électronique, la fréquence précise de mesure. La ligne de mesure placée devant le système à mesurer est munie d'un micromètre afin de relever avec précision les minimums de champ électrique.

Les mesures sont effectuées en mode TM_{01} et TE_{21}. Pour exciter ces deux modes dans le guide B, nous avons été amené à fabriquer en laboratoire deux sondes d'excitation sous forme coaxiale permettant d'engendrer un mode TM_{01} ou TE_{21} pratiquement pur.

.../.

2 - Méthode de mesure

Le guide B étant terminé par un court-circuit, on repère à la ligne de mesure les positions du minimum du champ électrique en fonction de la fréquence dans la bande considérée.

La mesure est refaite une nouvelle fois, mais le court-circuit est remplacé par la transition en réflexion totale suivie du guide A.

Soient :

Δx : l'écart mesuré entre deux minimums à une fréquence donnée

λ : la longueur d'onde correspondante à la fréquence de mesure en espace libre

λg : la longueur d'onde guidée correspondant à la fréquence de mesure et au mode considéré.

On a alors :

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{\lambda} \lambda g \qquad (61)$$

Δy est l'écart entre le "plan de court-circuit apparent" et le plan de court-circuit effectif de référence.

La position des plans de court-circuit en guide B sont donnés par :

$$z = \Delta y + n \lambda g/2 \qquad (62)$$

avec n = 1,2, 3 .....

3 - Résultats

Les figures 18,19 et 20 montrent quelques exemples de mesures sur transition conique en réflexion totale.

Figure 14

Guide A rayon = 25,00 mm

Guide B rayon = 33,26 mm

θ_o = 0,062 radian

mode TM_{01}.

Figure 15

Guide A rayon = 25,00 mm

Guide B rayon = 35,00 mm

θ_o = 0,13 radian

mode TE_{21}.

La bande de fréquence va dé 3,7 à 4,2 GHz.

.../.

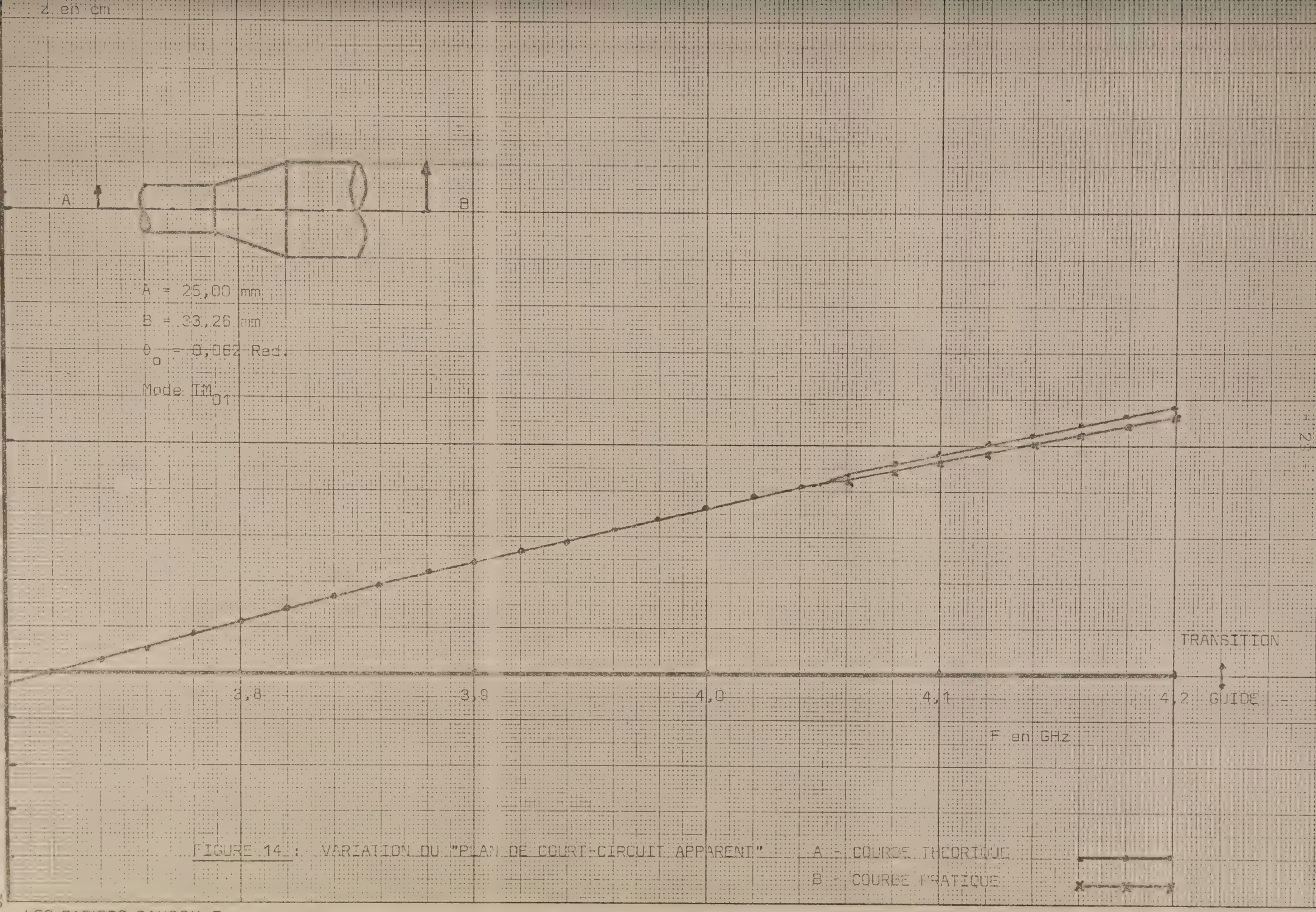


FIGURE 14 : VARIATION DU "PLAN DE COURT-CIRCUIT APPARENT"

LES PAPIERS CANSON France

z en cm

A = 25,00 mm

B = 35,00 mm

θ_o = 0,05 Rad.

Mode $1M_{01}$

TRANSITION

GUIDE

3,7 3,8 3,9 4,0 4,1 4,2

F en GHz

FIGURE 15 : VARIATION DU "PLAN DE COURT-CIRCUIT APPARENT"

A - COURBE THEORIQUE

B - COURBE PRATIQUE

LES PAPIERS CANSON France

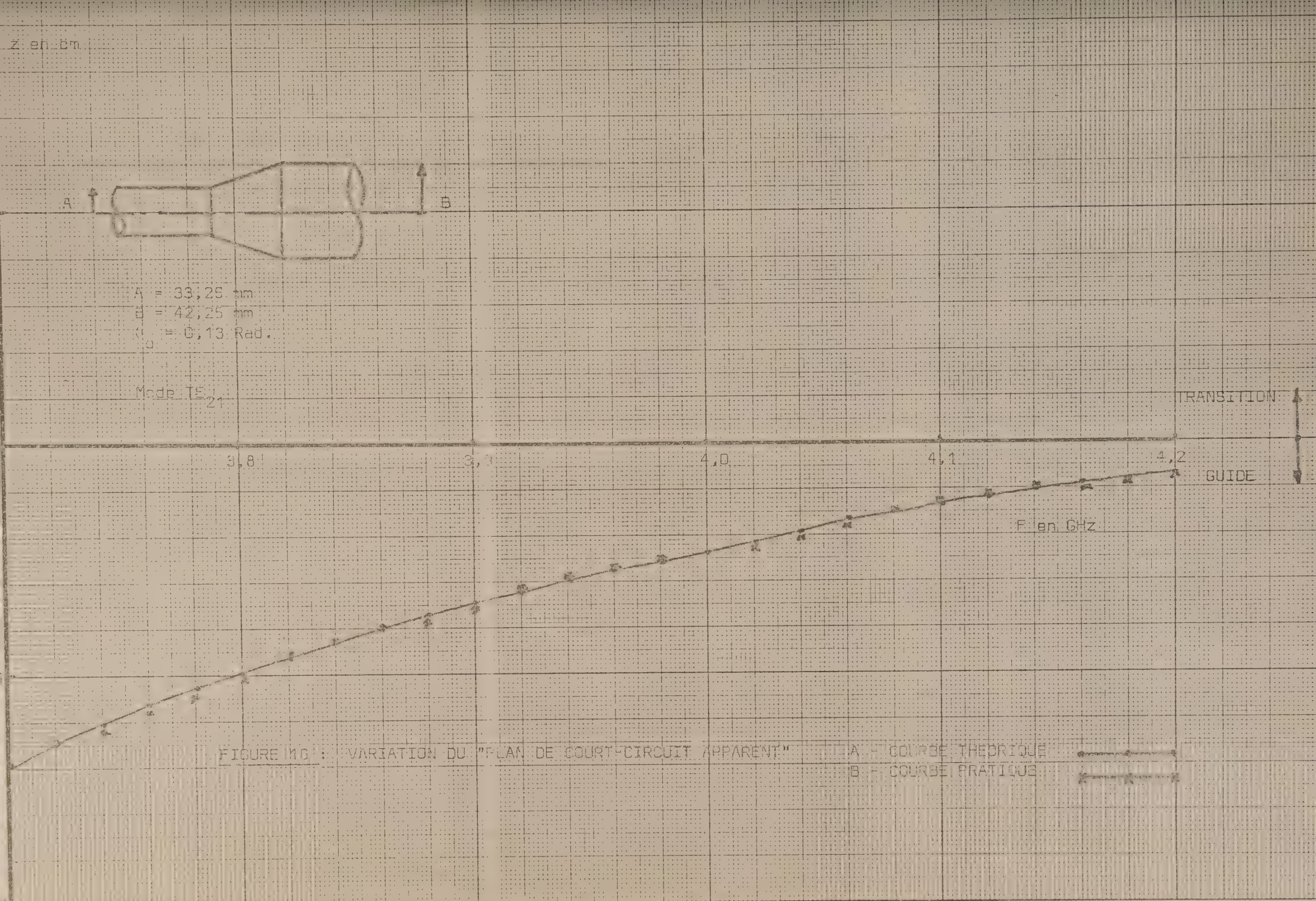


FIGURE N°6 : VARIATION DU "PLAN DE COURT-CIRCUIT APPARENT"

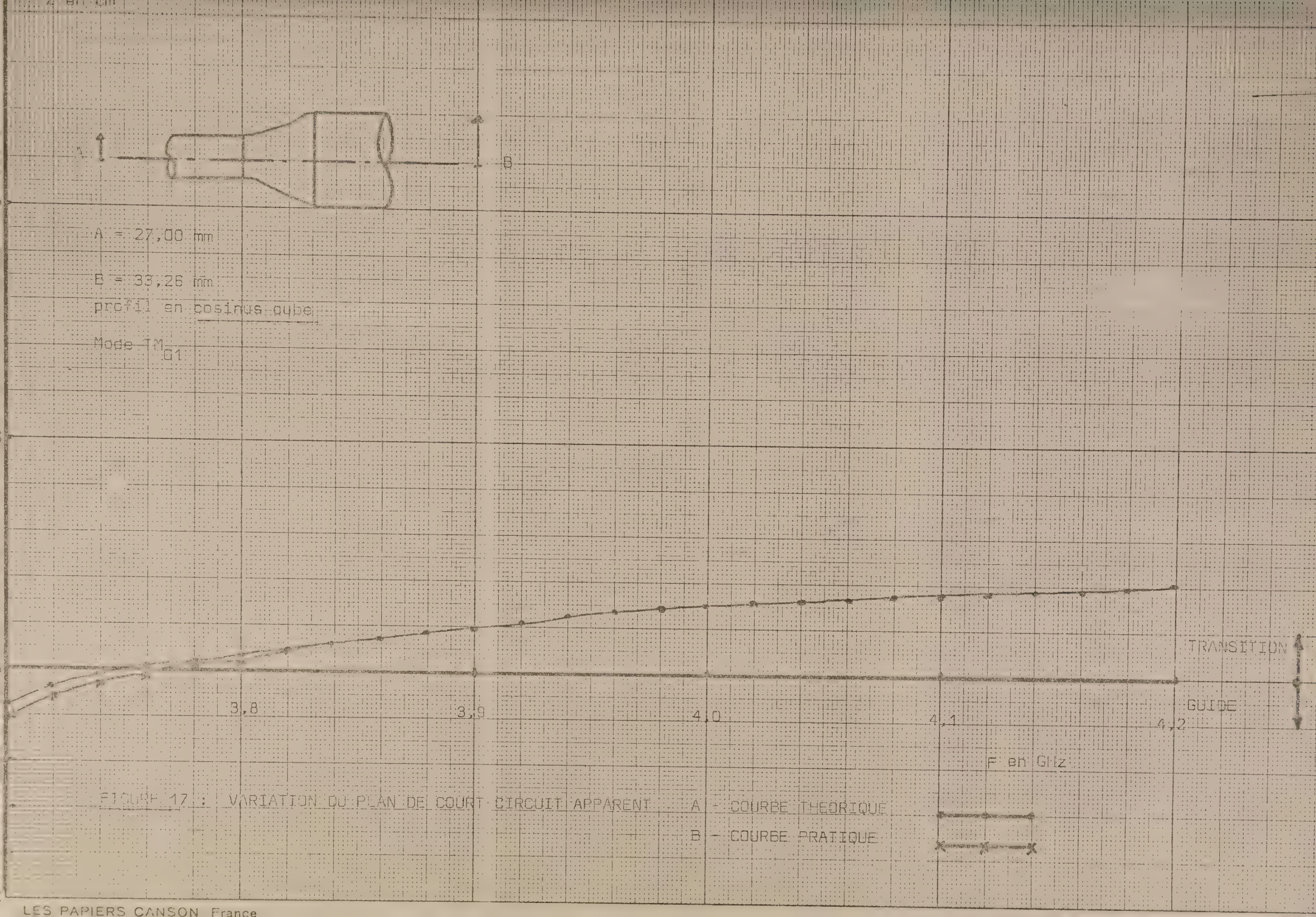


FIGURE 17 : VARIATION DU PLAN DE COURT CIRCUIT APPARENT A - COURBE THEORIQUE

B - COURBE PRATIQUE

LES PAPIERS CANSON France

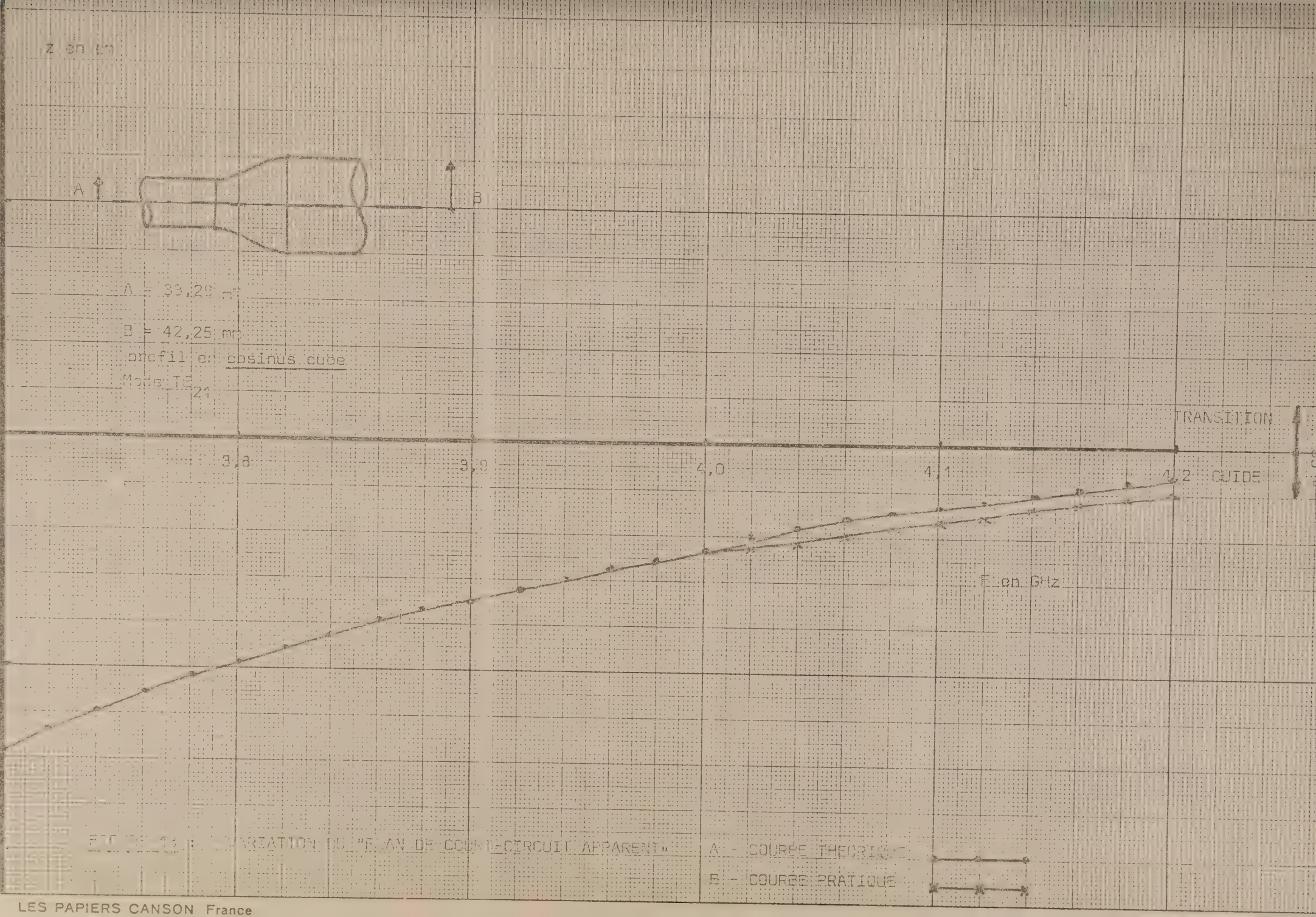


FIG. 21 : VARIATION DU "F AN DE COURT-CIRCUIT APPARENT"

LES PAPIERS CANSON France

[illegible]

A - [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

B° - [illegible]

[illegible]

[illegible]

- [illegible]

- [illegible]

[illegible]

[illegible]

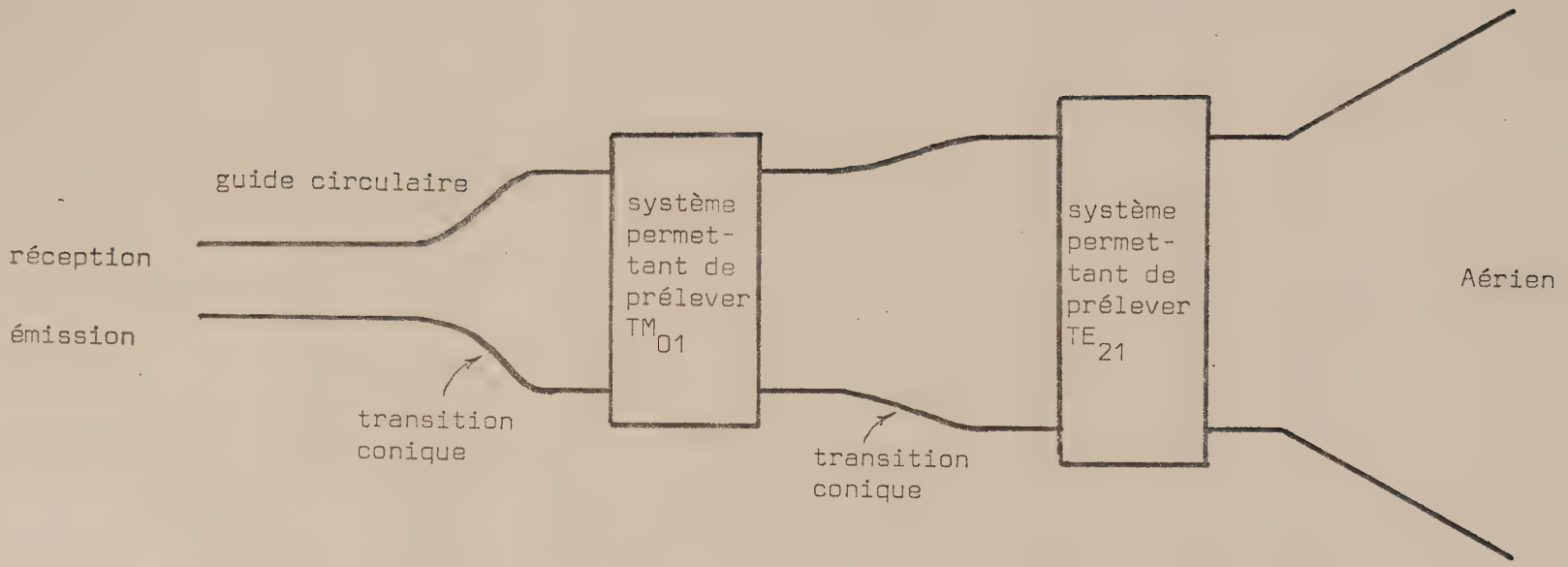

guide circulaire
réception
émission
transition conique
système permet-tant de prélever TM_{01}
transition conique
système permet-tant de prélever TE_{21}
Aérien

FIGURE 19

Il est donc nécessaire de pouvoir prélever de l'énergie électromagnétique fournie par les ondes de mode TM_{01} et TE_{21} à la fréquence balise pour élaborer les signaux de poursuite.

Les ondes TE_{11} sont seules utilisées par le récepteur de télécommunications et elles ne doivent pas être perturbées par le système de poursuite.

On a précisé que la balise portée par le satellite était placée à un endroit quelconque de la bande réception (3,7 - 4,2 GHz). On a donc intérêt à réaliser un système permettant d'élaborer des signaux de poursuite dans toute cette bande de fréquence.

On peut alors imaginer un système comme l'indique la figure 19.

En partant de l'aérien nous trouvons :

- un guide circulaire de diamètre approprié pour que puisse se propage le mode TE_{21},
- un système permettant de prélever l'information balise TE_{21} associé à une transition conique formant "plan de court-circuit" pour le mode TE_{21},
- un guide circulaire de diamètre approprié pour que puisse se propager le mode TM_{01},
- un système permettant de prélever l'information balise TM_{01}, associé à une transition conique formant "plan de court-circuit" pour le mode TM_{01},
- un guide circulaire où seul le mode TE_{11} peut se propager.

Nous voyons alors l'intérêt de l'étude que nous avons entreprise sur la "variation du plan de court-circuit" en mode TM_{01} et TE_{21} dans les transitions. En effet la largeur de bande et les performances de couplage des systèmes qui permettent de prélever de l'énergie électromagnétique en mode TM_{01} et TE_{21}, donc d'élaborer des signaux de poursuite, sont directement liées aux performances des transitions utilisées du point de vue de la variation du plan de court-circuit apparent en fonction de la fréquence.

Par ailleurs ces transitions ne doivent pas être trop brutales sinon, à l'émission, des modes supérieurs sont engendrés qui perturbent le diagramme de rayonnement de l'aérien.

VII - CONCLUSIONS

Les théories et calculs précédents ont permis la détermination de transitions "optimisées" pour des systèmes de poursuite des satellites de télécommunication dans les stations terriennes.

L'expérience a, avec une très bonne approximation, vérifié les résultats théoriques.

.../.

REMERCIEMENTS

Qu'il me soit permis d'exprimer ici mes remerciements à :

- M. POITEVIN - Ingénieur en Chef des Télécommunications , qui m'a dirigé et conseillé tout au long de ce travail.

- M. BOUSQUET - Ingénieur, qui m'a aidé pour la mise au point des programmes de calcul.

- M. RAMAT - Inspecteur principal adjoint qui a dirigé toute la partie expérimentale.

- M. GUILLAUME - Inspecteur central, qui m'a aidé à effectuer les mesures.

BIBLIOGRAPHIE

-:-:-:-:-:-:-

- GERHARD PIEFKE

Reflection at incidence of an H_{mn} - Wave at junction of circular waveguide and conical horn

Electromagnetique Theory and Antennas, vol.6, pt.1
E.C. Jordan, 1963, pp.269-234

- C.C.H.TANG

Mode conversion in tapered waveguides at and near cutoff

IEEE transactions on microwave theory and techniques
May 1966

- C.C.H. TANG

Optimization of waveguide tapers capable of multimode propagation
IRE transactions on microwave theory and techniques september 1961

- HANS - GEORG UNGER

Circular waveguide Taper of Improved Design

The bell system technical journal, july 1958

- S.A. SCHELKUNOFF

Conversion of Maxwell's equations into generalized Telegraphist's equations

The bell system technical journal, September 1955

- G. PIEFKE

Reflexion und Transmission beim Einfall einer,

H_{on} - welle auf einen Kegelförmigen Ubergang zwischen Zwei Hohlleitern
A.E.U. Band 15 (1961), Heft 10

- K.TANKA

Modes conversions through the tapered section of circular waveguide system
Onde électrique 1958, supplément spécial

- A. ANGOT

Compléments de Mathématiques

- HAND Book of Mathematical functions

National Bureau of standards Applied mathematics Series 55 (ch.9)

- C.G. MONTGOMERY
Technique of Microwave Measurements

- MARCUVITZ
Waveguide Handbook

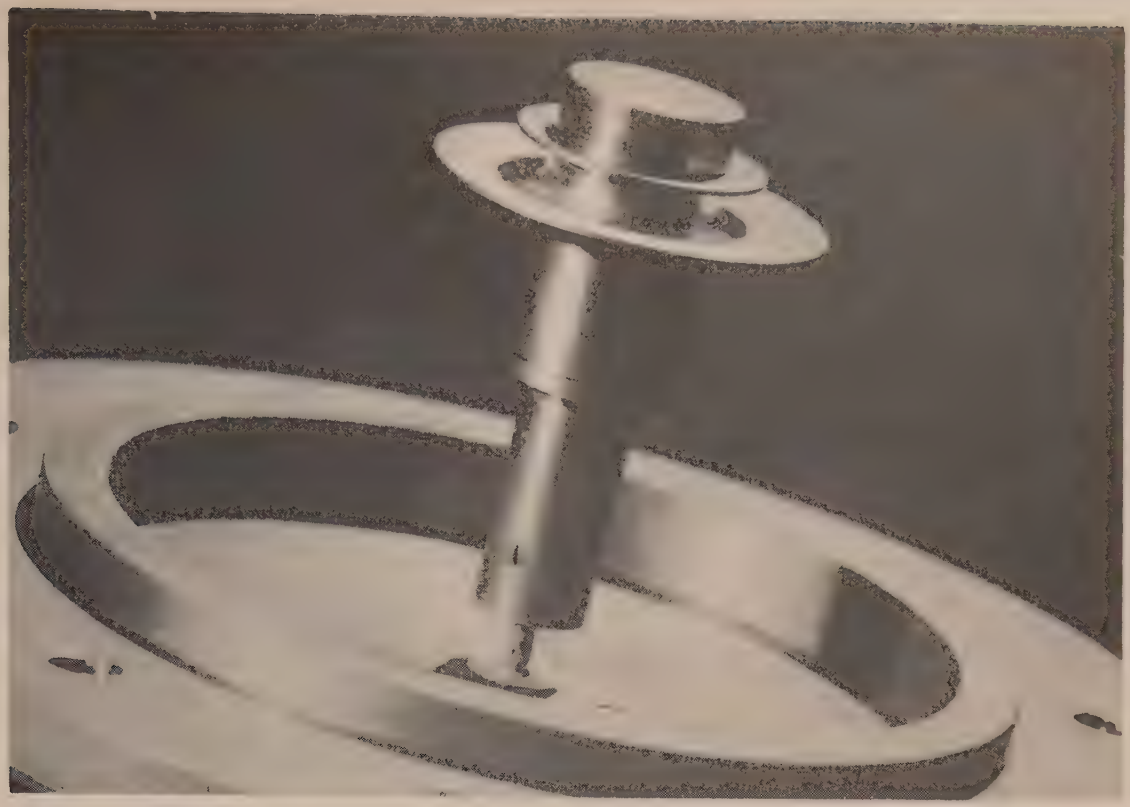


PHOTO N° 1

Sonde TH_{01}

PHOTO N° 2

Sonde TE_{21}

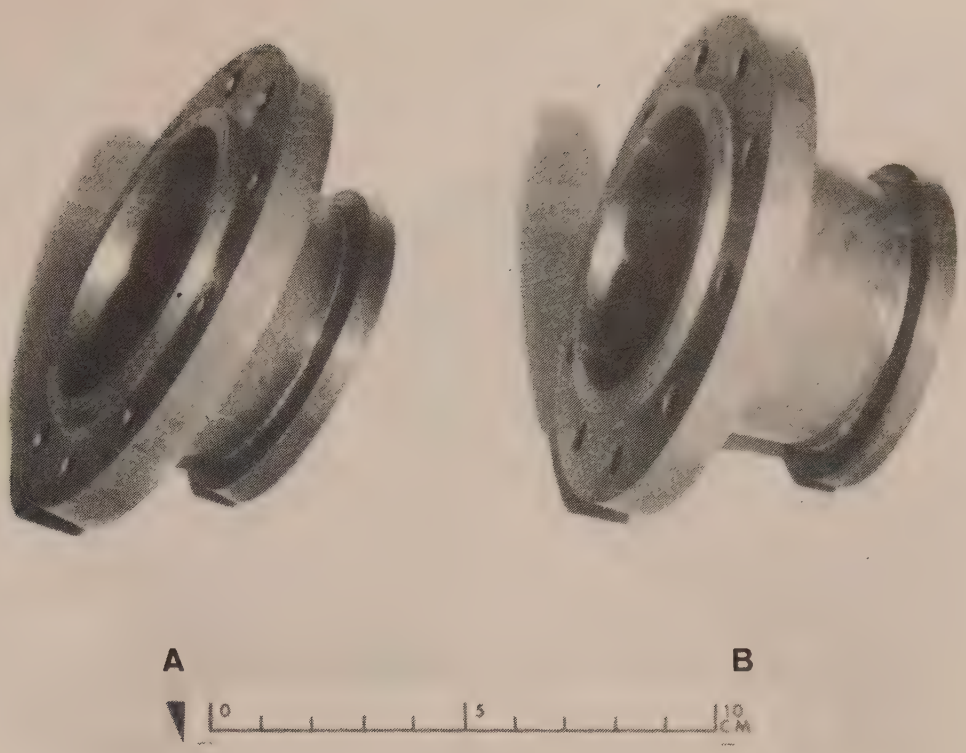


PHOTO N° 3

TRANSITIONS 66,52 mm/54,00 mm POUR MODE TM_{01}
A - Profil en cosinus cube
B - Profil linéaire Θ_o = 0,062 Radian

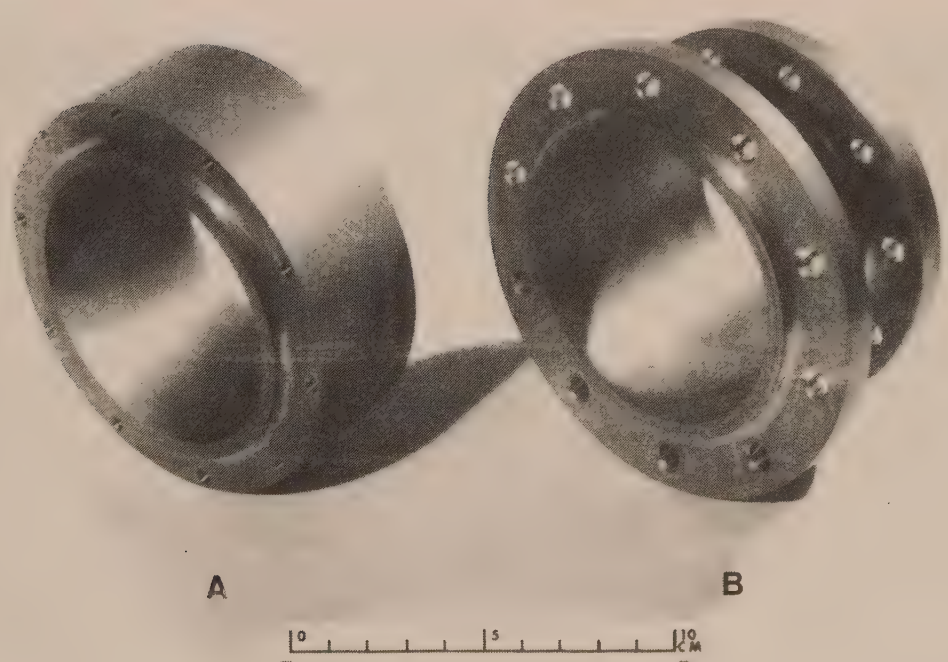


PHOTO N° 4

TRANSITIONS 84.5/66.52 POUR MODE TE_{21}
A - Profil en cosinus cube
B - Profil linéaire Θ_o = 0,13 Radian

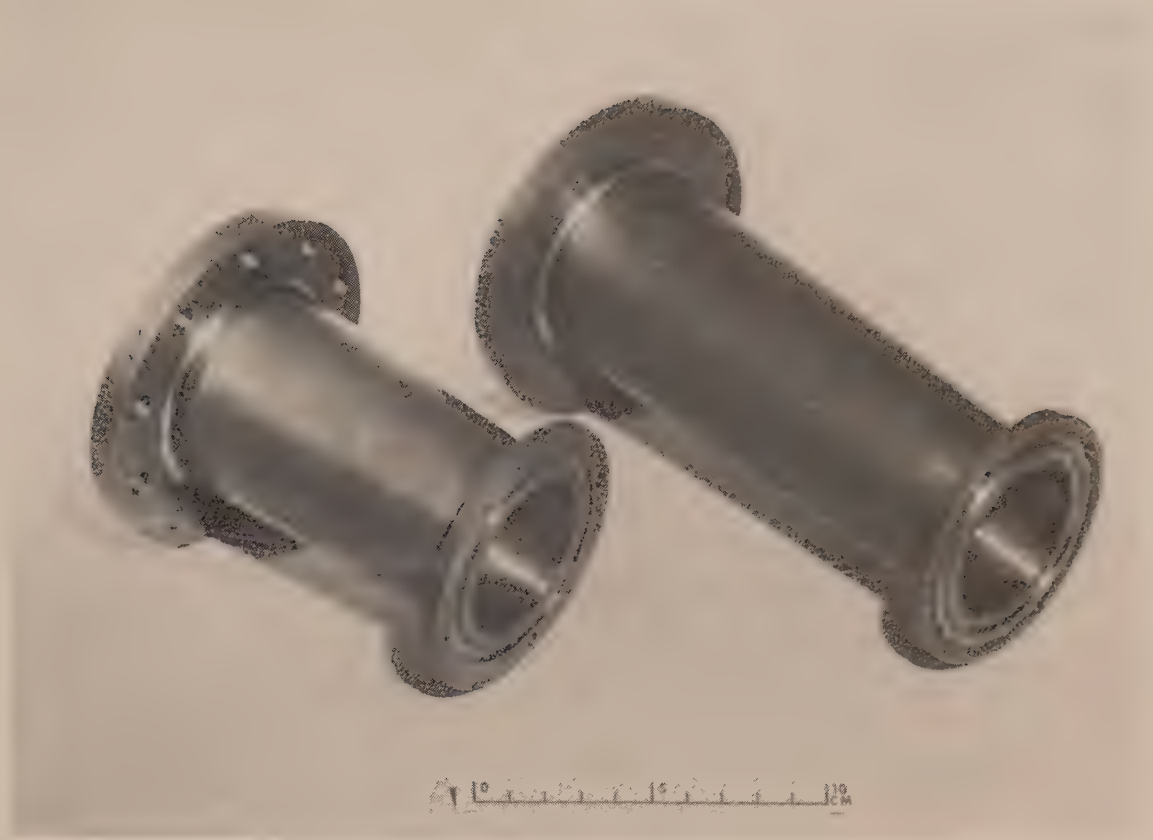


PHOTO N° 5

TRANSITIONS LINEAIRES 66,52/50

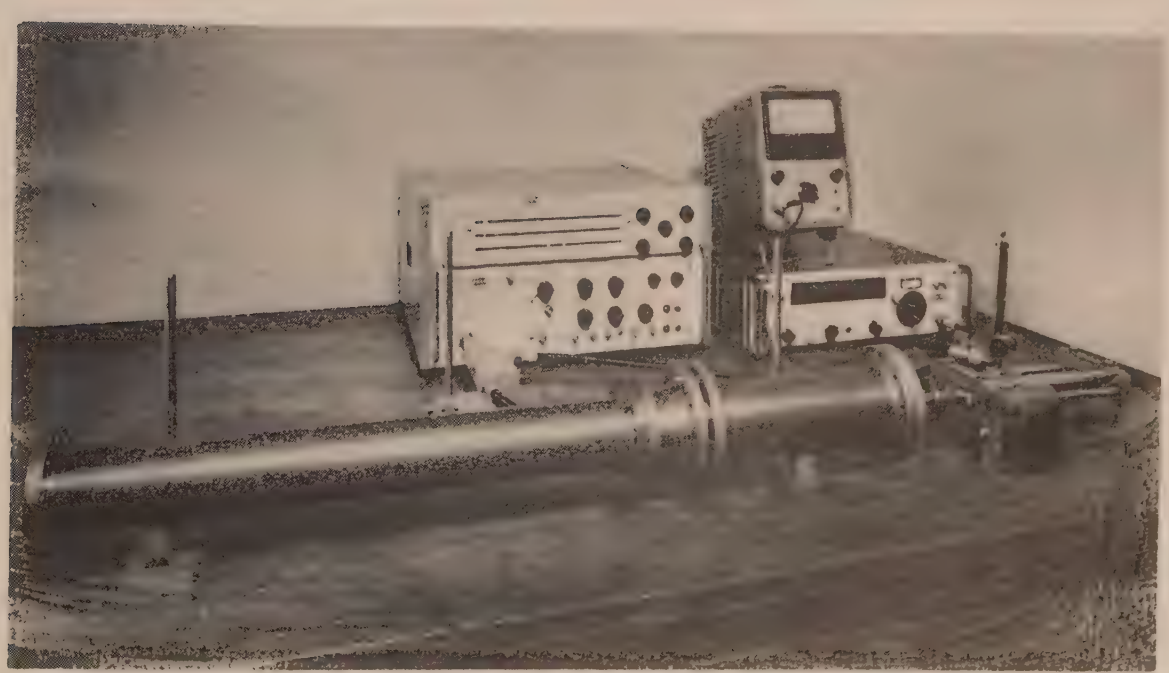


PHOTO N° 6

BANC DE MESURE UTILISE POUR RELEVER
"LE PLAN DE COURT-CIRCUIT APPARENT"
DES DIFFERENTES TRANSITIONS

PHOTO N°1 : SONDE TM_{01}

PHOTO N°2 : SONDE TE_{21}

PHOTO N°3 : TRANSITIONS 66,52 mm /54,00 mm pour mode TM_{01}

A - Profil en cosinus cube
B - Profil linéaire θ_o = 0,062 Radian

PHOTO N° 4 : TRANSITIONS 84.5/66.52 pour mode TE_{21}

A - Profil en cosinus cube
B - Profil linéaire θ_o = 0,13 Radian

PHOTO N° 5 : TRANSITIONS LINEAIRES 66,52/50

PHOTO N° 6 : BANC DE MESURE UTILISE POUR RELEVER "LE PLAN DE COURT-CIRCUIT APPARENT" DES DIFFERENTES TRANSITIONS

A N N E X E

PROGRAMME DE CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL

(1ère, 2ème et 3ème espèces)

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-:-:-:-

I - INTRODUCTION 1

II - RAPPELS ET DEFINITIONS 1

III - SOUS PROGRAMMES HANK1 (NU,Z), HANK2 (NU,Z) 3

IV - SOUS PROGRAMME BESS1 3

1 - Propriétés de $J_\nu(z)$ 3

2 - Principe du calcul de $J_\nu(z)$ 3

3 - Critère de qualité, régionnement et raccordement 9

4 - Organigrammes 12

5 - Résultats 12

V - SOUS PROGRAMME BESS 2 20

1 - Propriétés de $Y_\nu(z)$ 20

2 - Principe du calcul de $Y_\nu(z)$ 20

3 - Régionnement et raccordement entre les différentes régions 21

4 - Organigrammes 22

5 - Résultats 22

VI - CONCLUSION 30

BIBLIOGRAPHIE 31

I - INTRODUCTION

L'étude théorique de certains phénomènes de propagation dans un guide d'onde circulaire conduit à des formules faisant intervenir des fonctions de HANKEL et de BESSEL de première et seconde espèce, d'indice réel.

Seules les fonctions de BESSEL de première et seconde espèces $J_N(z)$ et $Y_N(z)$, d'indice entier, existent en "Bibliothèque" des programmes pour les calculateurs numériques à notre disposition au CNET : RAMSES II CAE 90/80, BGE 635.

De plus certaines de ces fonctions ne peuvent avoir un indice trop élevé.

Pour nos besoins, nous avons été amené à établir les programmes complets de calcul des fonctions suivantes :

HANK1 (NU, Z) fonction de HANKEL de première espèce,
HANK2 (NU, Z) fonction de HANKEL de deuxième espèce,
BESS1 (NU, Z) fonction de BESSEL de première espèce,
BESS2 (NU, Z) fonction de BESSEL de deuxième espèce,

où NU est l'indice à valeurs réelles, positives ou nulles

et Z la variable à valeurs réelles, positives ou nulles.

II - RAPPELS ET DEFINITIONS

Les solutions de l'équation différentielle

$$\ddot{y} + \frac{1}{z} \cdot \dot{y} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right).y = 0 \qquad (1)$$

sont :

- les fonctions de BESSEL de première espèce $J_\nu(z)$ et

$J_{-\nu}(z)$

avec $$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!\;\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \qquad (2)$$

Γ étant la fonction factorielle ou fonction Eulérienne de deuxième espèce.

- les fonctions de BESSEL de deuxième espèce $Y_\nu(z)$

dites aussi fonctions de WEBER ou de NEUMANN

avec $$N_\nu(z) = Y_\nu(z) = \frac{\cos(\pi\nu).\, J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)} \qquad (3)$$

- les fonctions de BESSEL de troisème espèce $H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)$

dites aussi fonctions de HANKEL de première et seconde espèce,

avec $$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + j\, Y_\nu(z) \qquad (4)$$

et $$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - j\, Y_\nu(z) \qquad (5)$$

.../.

```
0001  C      SOUS PROGRAMME HANK1
0002  FFORTRAN GO
0003         FUNCTION HANK1(NU,Z)
0004         REAL NU,JN
0005         COMPLEX HANK1,CMPLX
0006         JN=BESS1(NU,Z)
0007         YN=BESS2(NU,Z)
0008         HANK1=CMPLX(JN,YN)
0009         RETURN
0010         END
```

```
0001  C      SOUS PROGRAMME HANK2
0002  FFORTRAN GO
0003         FUNCTION HANK2(NU,Z)
0004         REAL NU,JN
0005         COMPLEX HANK2,CMPLX
0006         JN=BESS1(NU,Z)
0007         YN=BESS2(NU,Z)
0008         HANK2=CMPLX(JN,(-YN))
0009         RETURN
0010         END
```

III - SOUS PROGRAMMES HANK1 (NU,Z), HANK2 (NU,Z)

Dans ces programmes on utilise les formules de définition des fonctions de HANKEL de première et seconde espèce (équations 4 et 5)

où NU = ν Réel, positif ou nul

Z = z Réel, positif ou nul

HANK1 = $H_\nu^{(1)}(z)$ complexe

HANK2 = $H_\nu^{(2)}(z)$ complexe

Ces sous programmes font appel à d'autres sous programmes, ceux des fonctions de BESSEL de première et seconde espèce : BESS1 (NU,Z) et BESS2 (NU,Z)

IV - SOUS PROGRAMME BESS1 (NU,Z)

(fonction de BESSEL de première espèce : $J_\nu(z)$)

Ici NU = ν Réel positif ou nul

Z = z Réel positif ou nul

1 - Propriétés de $J_\nu(z)$

Pour ν et z réels positifs ou nuls :

$$|J_\nu(z)| \leq 1$$

$$J_\nu(z) \Big|_{z \to \infty} \longrightarrow 0$$

$$J_\nu(z) \Big|_{z \to o} \longrightarrow 0 \qquad \nu \neq 0$$

$$J_o(o) = 1$$

$J_\nu(z)$ est une fonction continue de z et de ν dans le quart de plan $z \geq o$, $\nu \geq o$, qui oscille autour de la valeur zéro et dont l'enveloppe est monotone décroissante vers zéro quand z tend vers l'infini.

Les figures 1 et 2 représentent les fonctions $J_\nu(z)$

2 - Principe du calcul de $J_\nu(z)$

a) Développement "de définition"

Par définition :

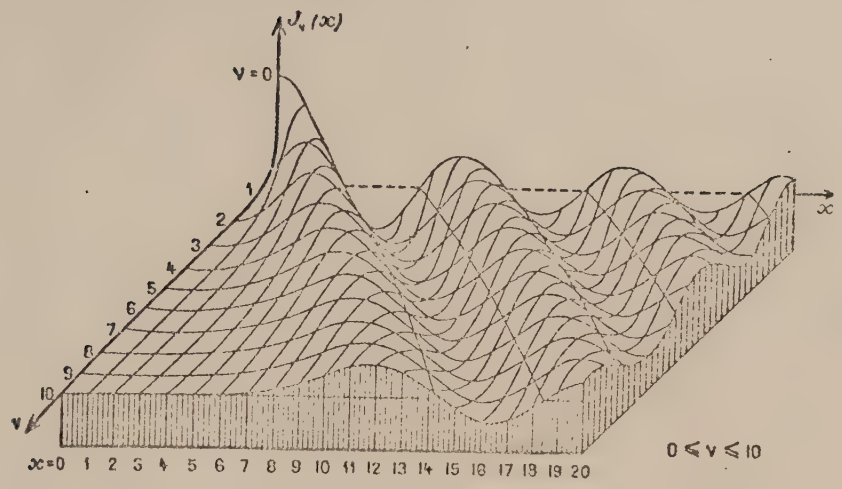
$$J_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n U_n (z/2)^{2n} \qquad (6)$$

avec

$$U_n = \frac{1}{n\,!\,\Gamma(n+\nu+1)} \qquad (7)$$

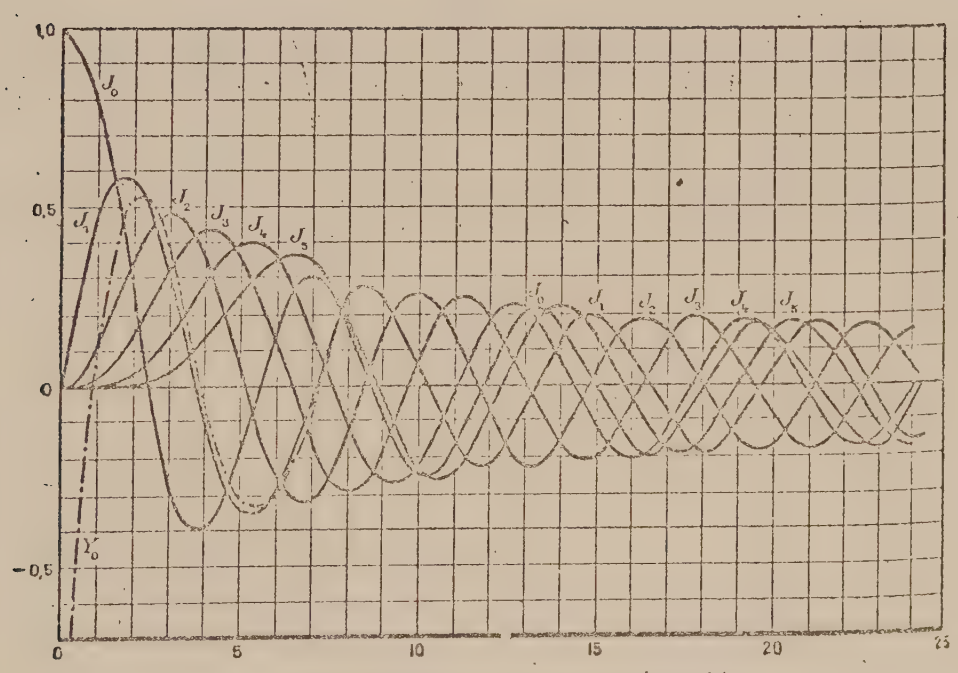
.../.

FIGURE 1



Surfaces $J_\nu(x)$

FIGURE 2



Courbes $y = J_0(x), J_1(x), J_2(x) \ldots$

Le rayon de convergence z_o de cette série U_n est infini :

$$z_o = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{U_n}{U_{n+1}}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n\,(n+\nu+1)} \quad \sim \infty \qquad (8)$$

Si ν est entier

alors $\Gamma\,(n + \nu + 1) = (n + \nu)\,!$ (9)

Si ν n'est pas entier les calculs de $\Gamma\,(n+\nu+1)$ ne sont pas simples.

Cette série, de $J_\nu(z)$, est alternée et pour des valeurs de ν supérieures à 1, les termes de la série deviennent croissants puis décroissants en module. Pour calculer à l'aide de cette série une valeur voisine de l'unité on est parfois obligé de faire la différence entre des termes $U_n (z/2)^{2n}$ de l'ordre de 10^{14} alors que le calculateur ne conserve que neuf chiffres décimaux significatifs. L'erreur absolue est alors de $10^{+14}/10^9 = 10^5$ et l'erreur relative dans ce cas de 10^5 ! Pour ces deux raisons ce développement en série ne convient pas au calcul numérique sur calculateur. Nous utiliserons donc d'autres développements qui seront assymptotiques avec une bonne précision.

b) Développement assymptotique de DEBYE pour $(z < \nu)$

En posant $z = \nu \operatorname{sech} \alpha$, (10)

avec $\operatorname{th} \alpha = \sqrt{1 - (z/\nu)^2}$, (11)

On a :

$$J_\nu(z) \neq\neq \frac{e^{\nu(\operatorname{th}\alpha - \alpha)}}{\sqrt{2\pi\nu \operatorname{th}\alpha}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_K(\coth\alpha)}{\nu^K} \right\} \cdots \quad (12)$$

$$Y_\nu(z) \neq\neq - \frac{e^{\nu(\alpha - \operatorname{th}\alpha)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\nu \operatorname{th}\alpha}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^K \frac{U_K(\coth\alpha)}{\nu^K} \right\} \quad (13)$$

avec $t = \coth \alpha$

$U_o(t) = 1$

$U_1(t) = (3t - 5t^3)/24$

$U_2(t) = (81t^2 - 462t^4 + 385t^6)/1152$

$U_3(t) = (30.375t^3 - 369.603t^5 + 765.765t^7 - 425.425t^9)/414.720$

$U_4(t) = 4.465.125t^4 - 94.121.676t^6 + 349.922.430t^8 - 446.185.740t^{10} + 185.910.725t^{12})/39.813.120$

.../.

$$U_5(t) = (1.519.035.525t^5 - 49.286.948.607t^7 + 284.499.769.554t^9 - 614.135.872.350t^{11} + 566.098.157.625t^{13} - 188.699.385.875t^{15}) / (204.120 \times 8^5)$$

$$U_6(t) = (2.757.049.477.875t^6 - 127.577.298.354.750t^8 + 1.050.760.774.457.901t^{10} - 336.903.206.826.180t^{12} + 5.104.696.716.244.125t^{14} - 3.685.299.006.138.750t^{16} + 1.023.694.168.371.875t^{18}) / (18.370.800 \times 8^6)$$

Les coefficients d'ordre supérieurs $U_K(t)$ peuvent s'obtenir par récurrence :

$$U_{K+1}(t) = \frac{1}{2} t^2 (1 - t^2) U_K(t) + \frac{1}{8} \int_0^t (1 - 5t^2) U_K(t)\, dt$$

c) Développement assymptotique de DEBYE pour $(z > \nu)$

En posant $z = \nu \sec \beta$

avec $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{(z/\nu)^2 - 1}$,

on a :

$$J_\nu(z) \neq\neq \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \operatorname{tg}\beta}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_{2K}(j \operatorname{cotg} \beta)}{\nu^{2K}} \cdot \cos \Phi - j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_{2K+1}(j \operatorname{cotg} \beta)}{\nu^{2K+1}} \cdot \sin \Phi \right\} \quad (14)$$

$$Y_\nu(z) \neq\neq \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \operatorname{tg}\beta}} \left\{ \sum_{k=0} \frac{U_{2K}(j \operatorname{cotg} \beta)}{\nu^{2K}} \cdot \sin \Phi + j \sum_{K=0}^{\infty} \frac{U_{2K+1}(j \operatorname{cotg} \beta)}{\nu^{2K+1}} \cdot \cos \Phi \right\} \quad (15$$

avec :

$\Phi = \nu (\operatorname{tg} \beta - \beta) - \frac{1}{4} \pi$

$t = \operatorname{cotg} \beta$

$U_0(t) = 1$

$U_1(t) = + j (3t + 5t^3)/24$

$U_2(t) = -(81 t^2 + 462 t^4 + 385 t^6) / 1152$

$U_3(t) = - j (30.375t^3 + 369.603t^5 + 765.765t^7 + 425.425t^9)/414.720$

$U_4(t) = (4.465.125t^4 + 94.121.676t^6) + 349.922.430t^8 + 446.185.740t^{10} + 185.910.725t^{12})/39.813.120$

.../.

$$U_5(t) = + j\,(1.519.035.525t^5 + 49.286.948.607t^7 + 284.499.769.554t^9 + 614.135.872.350t^{11} + 566.098.157.625\,t^{13} + 188.699.385.875t^{15}) / (204.120 \times 8^5$$

$$U_6(t) = -\,(2.757.049.477.875t^6 + 127.577.298.354.750t^8 + 1.050.760.774.457.901\,t^{10} + 3.369.032.068.261.860t^{12} + 5.104.696.716.244.125t^{14} + 3.685.299.006.138.750t^{16} + 1.023.694.168.371.875t^{18})/(18.370.800 \times 8^6)$$

Les coefficients $U_K(t)$ d'ordre supérieur pouvant être obtenus par une formule de récurrence analogue à celle vue précédemment.

d - Développement pour $(z \neq\neq \nu)$

En posant $z = \nu + x\nu^{1/3}$

$J_\nu(z) = J_\nu(\nu + x\nu^{1/3})$

on a :

$$J_\nu(\nu + x\nu^{1/3}) \neq\neq \sqrt[3]{\frac{2}{\nu}}\, A_i(-2^{1/3}x)\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_K(x)}{\nu^{2K/3}}\right\} + \frac{2^{2/3}}{\nu}\, A_i'(-2^{1/3}x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_K(x)}{\nu^{2K/3}} \qquad (16)$$

$$Y_\nu(\nu + x\nu^{1/3}) \neq\neq -\sqrt[3]{\frac{2}{\nu}}\, B_i(-2^{1/3}x)\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_K(x)}{\nu^{2K/3}}\right\} - \frac{2}{\nu}^{2/3} B_i'(-2^{1/3}x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_K(x)}{\nu^{2K/3}} \qquad (17)$$

avec

$$f_1(x) = -\frac{1}{5}x$$

$$f_2(x) = -\frac{9}{100}x^5 + \frac{3}{25}x^2$$

$$f_3(x) = \frac{957}{7000}x^6 - \frac{173}{3150}x^3 - \frac{1}{225}$$

$$f_4(x) = \frac{27}{20000}x^{10} - \frac{23573}{147000}x^7 + \frac{5903}{138600}x^4 + \frac{947}{346500}x$$

$$g_0(x) = \frac{3}{10}x^2$$

$$g_1(x) = -\frac{17}{70}x^3 + \frac{1}{70}$$

$$g_2(x) = -\frac{9}{7000}x^7 + \frac{611}{3150}x^4 - \frac{37}{3150}x$$

$$g_3(x) = \frac{549}{28000}x^8 - \frac{110767}{693000}x^5 + \frac{79}{12375}x^2$$

.../.

A_i, B_i et A'_i , B'_i étant les fonctions d'AIRY et leurs dérivées.

Les fonctions d'AIRY sont les solutions de l'équation différentielle :

$$\ddot{y} - xy = 0 \qquad (18)$$

, et peuvent s'écrire :

$$A_i(x) = C_1 f(x) - C_2 g(x) \qquad (19)$$

$$B_i(x) = \sqrt{3}\left[C_1 f(x) + C_2 g(x)\right] \qquad (20)$$

avec :

$$C_1 = A_i(0) = B_i(0) / \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}\,\Gamma(2/3)}$$

$$\boxed{= 0{,}355.028.053.887.817}$$

$$C_2 = -A'_i(0) = B'_i(0) / \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}\,\Gamma(1/3)}$$

$$\boxed{= 0{,}258.819.403.792.807}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1.4}{6!}x^6 + \frac{1.4.7}{9!}x^9 + \cdots\cdots$$

$$= \sum_0^\infty 3^K \left(\frac{1}{3}\right)_K \frac{x^{3K}}{(3K)!}$$

$$g(x) = x + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2.5}{7!}x^7 + \frac{2.5.8}{10!}x^{10} + \cdots\cdots$$

$$= \sum_0^\infty 3^K (2/3)_K \frac{x^{3K+1}}{(3K+1)!}$$

expressions dans lesquelles, on a écrit par convention :

$$(\alpha + 1/3)_0 = 1$$

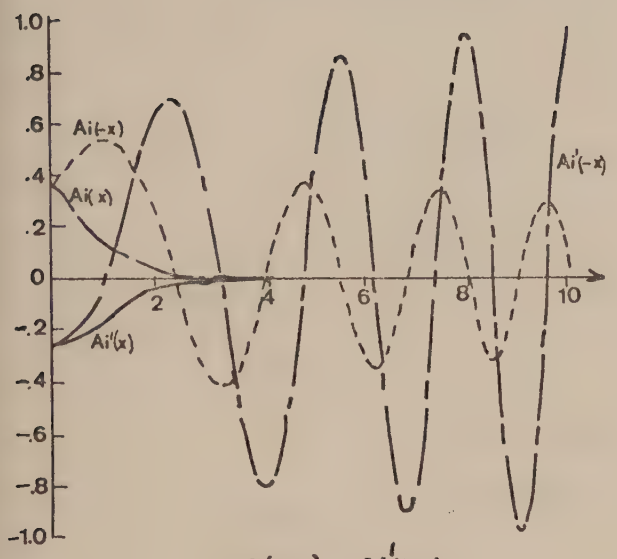
$$3^K (\alpha + 1/3)_K = (3\alpha + 1)(3\alpha + 4) \cdots\cdots (3\alpha + 3K - 2),$$

α étant arbitraire, K = 1,2,3, ...

.../.

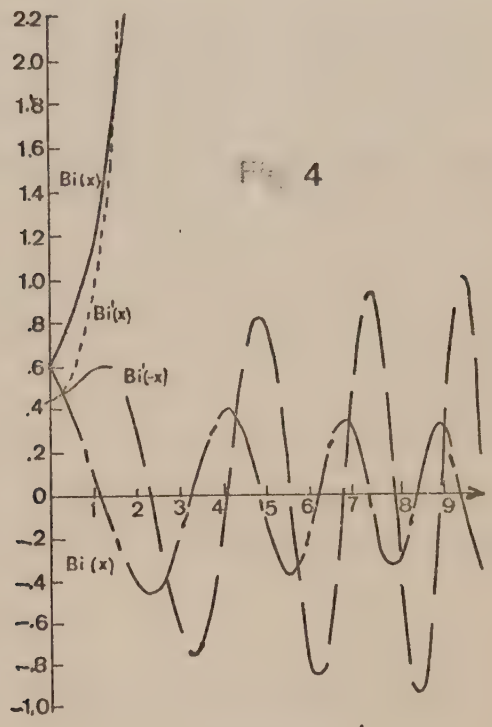
Les figures 3 et 4 montrent ces différentes fonctions d'AIRY.

Fig.3



Ai(± x), Ai'(± x)

Fig. 4



Bi(±x) ,Bi' (±x)

3 - Critère de qualité, régionnement et raccordement

a) Critère de qualité d'un développement en série

- Le calcul de $J_\nu(z)$ sera fait numériquement sur calculateur. A chaque phase du calcul l'erreur relative est au moins de 10^{-9}.

- Dans la région $(0 \leqslant z \leqslant \nu)$ la fonction $J_\nu(z)$ est positive, monotone, décroissante vers zéro quand z tend vers zéro.

Nous avons choisi comme critère de qualité d'un développement dans le domaine $(0 \leqslant z \leqslant \nu)$, que l'erreur relative sur $J_\nu(z)$ soit inférieure à 10^{-5}.

- Dans la région $(0 \leqslant \nu \leqslant z)$ la fonction $J_\nu(z)$ oscille autour de zéro.

Nous avons choisi comme critère de qualité d'un développement dans le domaine $(0 \leqslant \nu \leqslant z)$ que l'erreur relative sur l'enveloppe de $J_\nu(z)$ soit inférieure à 10^{-5}.

b) Régionnement

- Développement (12) : Région(A)

D'un point de vue purement analytique le développement (12) est valable pour $z < \nu$. Dans la littérature contemporaine à notre disparition, seuls E. JAHNKE et F. EMDE dans "Tables of Fonctions with formulae and Curves" page 139, apportent les restrictions suivantes, sans explication ni précision :

.../.

$$\sqrt{\nu^2 - z^2} > 1.75\ \nu^{2/3}$$

$$\sqrt{\nu^2 - z^2} > 6$$

D'un point de vue numérique, le développement (12) apparait bon dans le domaine (A) défini par :

$$z \geq 0$$

$$\nu \geq 0$$

$$\nu \geq \sqrt{z^2 + Kz^{4/3}} \qquad (21)$$

$$K = \left(\frac{275}{8}\right)^{2/3} \qquad (22)$$

Le domaine A du plan(O,z) limité par la courbe I, est représenté figure 5 .

- Développement (14) : Région(E)

Ce développement (14) apparait bon dans le domaine (E) défini par :

$$z \geq 0$$

$$\nu \geq 0$$

$$z \geq \sqrt{\nu^2 + K\,\nu^{4/3}} \qquad (23)$$

$$K = \left(\frac{450}{8}\right)^{2/3} \qquad (24)$$

Voir courbe IV et domaine E, figure 5.

- Développement (16) : Région(C)

Ce développement apparait bon dans le domaine (C) défini par :

$$z \geq 0$$

$$\nu \geq 0$$

$$\frac{|z - \nu|}{\sqrt[3]{\nu}} \leq K \qquad (25)$$

$$K = 1,10$$

Voir courbes II et III et domaine C, figure 5.

.../.

Remarque :

Dans les régions A et E pour minimiser les erreurs de calcul numérique nous avons écrit les calculs un peu différemment en posant :

$$t^2 = \frac{1}{1 - p}$$

avec $p = (z/\nu)^2$

ou $p = (\nu/z)^2$

c) Raccordement

Nous avons donc obtenu trois régions (A,C,E) où le calcul peut s'effectuer. Néanmoins il reste en plus deux régions (B,D) qui séparent les précédentes et où l'application des différents développements précédents ne donne que des résultats médiocres avec parfois des erreurs de l'ordre de 80%. La formule de récurrence :

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z) \qquad (26)$$

permet de calculer de proche en proche $J_{\nu-n}(z)$ à partir de $J_\nu(z)$ et $J_{(\nu+1)}(z)$ pour n entier. On choisira ν tel que (z,ν) soit le point le plus proche de $(z,\nu-n)$ se trouvent dans une région où un des développements précédents s'applique avec une bonne précision.

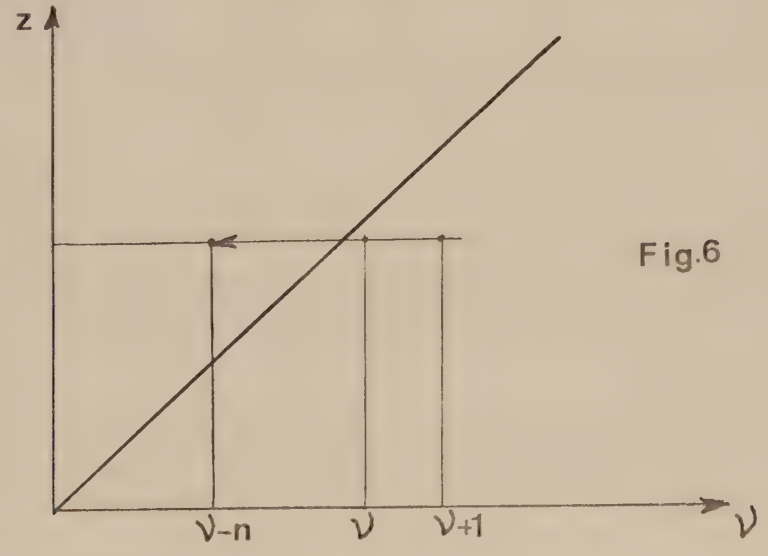


Fig.6

- Région B

Le calcul dans la région B de la figure (5) est obtenu en utilisant la formule de récurrence (26) avec deux points de départ dans A voisins de la frontière (I).

.../.

- Région D

Le calcul dans la région D de la figure (5) est obtenu en utilisant la formule de récurrence (26) avec deux points de part et d'autre de la droite $z = \nu$ dans la région C.

- Région F

Il s'est avéré, d'après les résultats numériques, plus opportun pour $z \leqslant 5$, de partir de la région A en appliquant la formule de récurrence pour calculer la valeur de $J_\nu(z)$ au lieu d'appliquer tout autre développement.

- Protection "Nombre trop petit"

Pour éviter que le calculateur n'arrête son travail à cause d'une division par zéro, ou pour avoir trouvé un nombre trop petit ($\leqslant 10^{-70}$) :
Si z est inférieur à 10^{-9} on pose $z = 10^{-9}$

Si ν est inférieur à 10^{-9} on pose $\nu = 10^{-9}$

Si $J_\nu(z)$ est inférieur à 10^{-70} ce qui se produit dans la région A pour les faibles valeurs de z par rapport à ν, on pose $J_\nu(z) = 10^{-70}$.

4 - Organigrammes

Les diagrammes ci-après précisent les organigrammes du programme BESS 1 (NU,Z).

5- Résultats

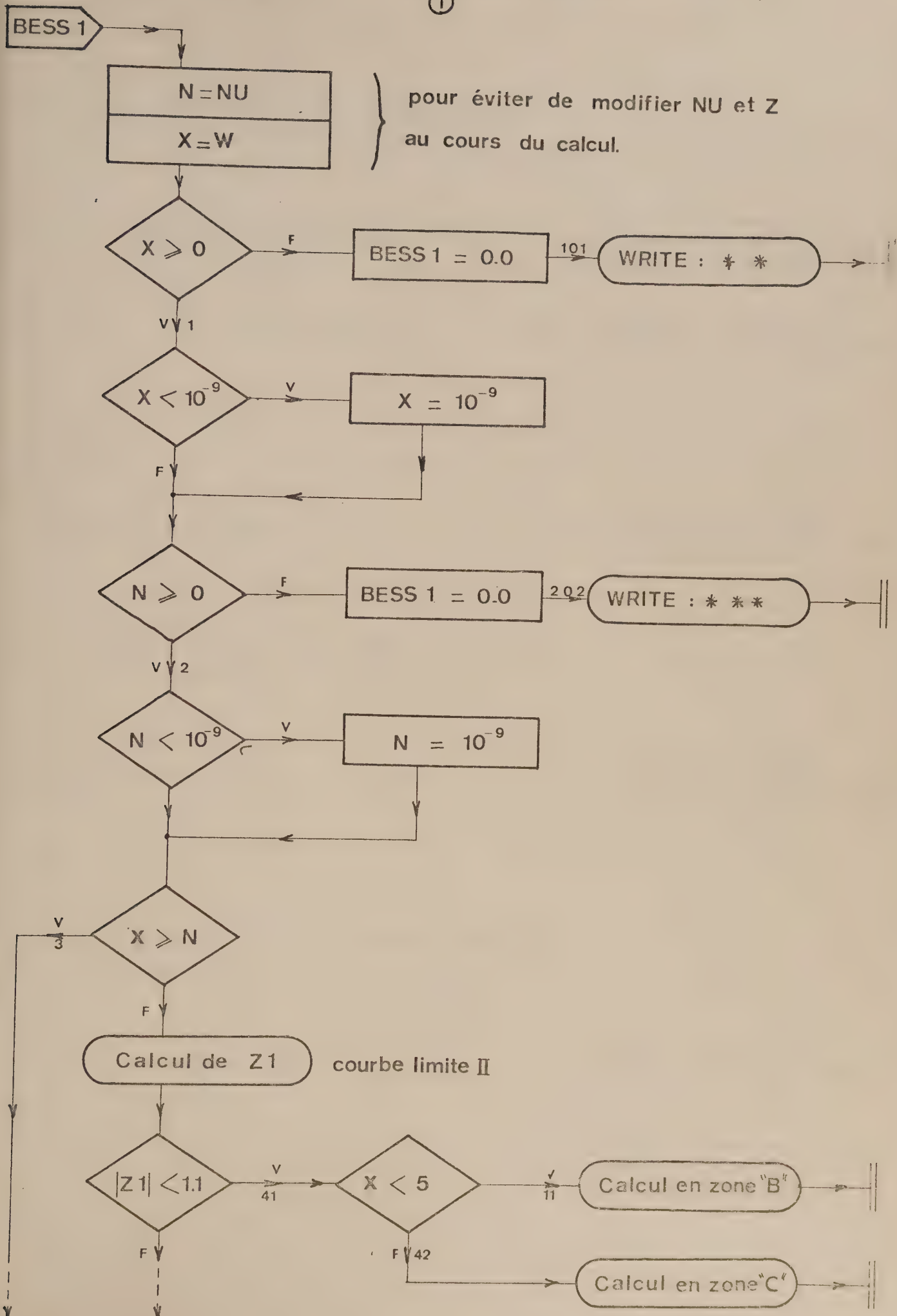
Plusieurs programmes tests ont été effectués afin de vérifier la précision de calcul par comparaison avec des tables de fonctions de BESSEL à dix chiffres significatifs. D'une manière générale les résultats obtenus sur RAMSES II sont exacts à au moins six chiffres significatifs et parfois à neuf chiffres significatifs.

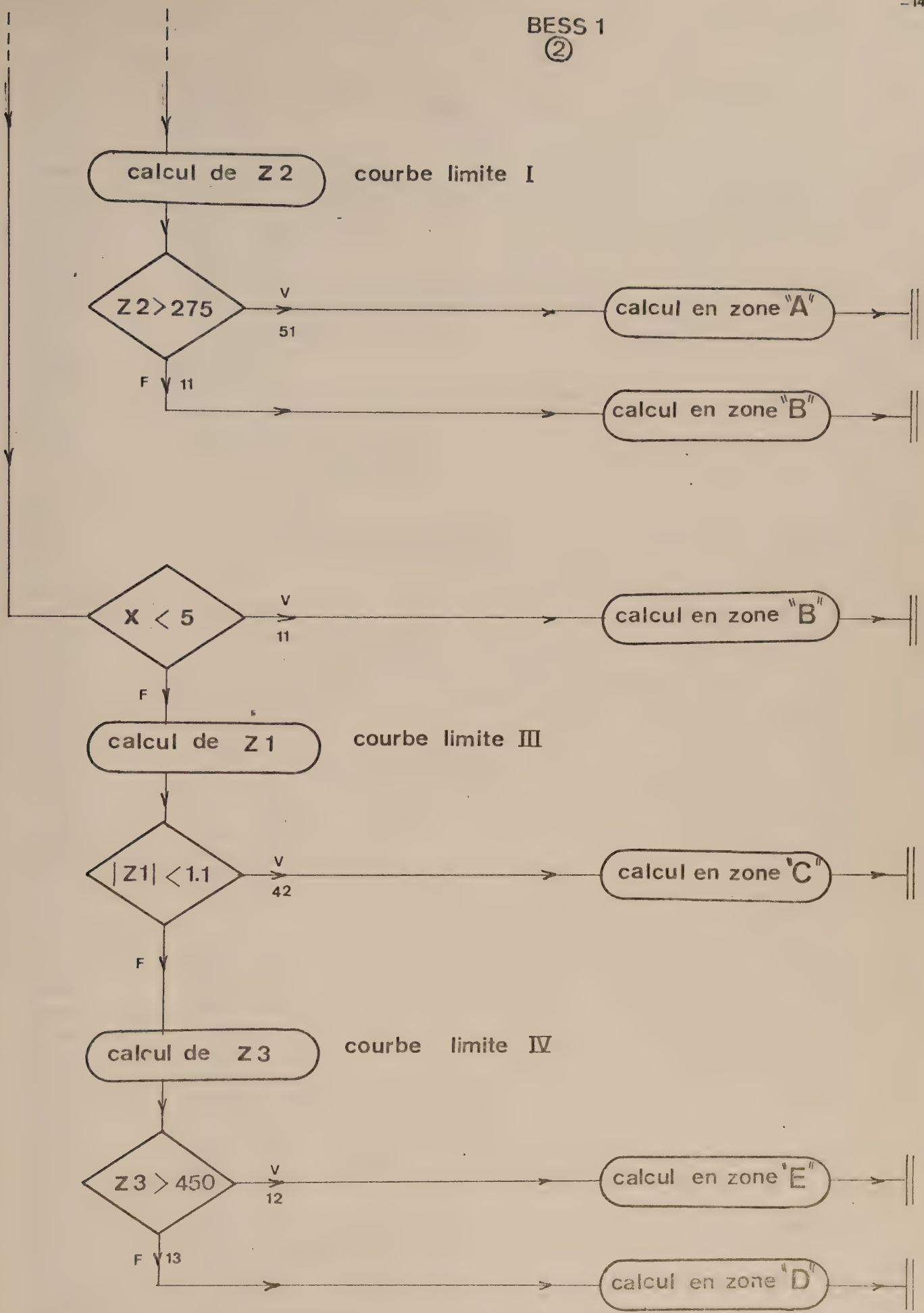
Les résultats sur CAE 90/80 sont encore meilleurs que ceux trouvés sur RAMSES II (ils sont exacts à au moins huit chiffres significatifs) sauf dans le "pavé" ($0 \leqslant z \leqslant 4$, $0 \leqslant \nu \leqslant 4$) où l'on n'obtient qu'au moins cinq chiffres significatifs exacts.

.../.

Organigramme du régionnement dans BESS 1 (NU, Z)

①




BESS 1
②
calcul de Z 2
courbe limite I
Z 2 > 275
V
51
F
11
calcul en zone "A"
calcul en zone "B"
X < 5
V
11
calcul en zone "B"
F
calcul de Z 1
courbe limite III
| Z1 | < 1.1
V
42
calcul en zone "C"
F
calcul de Z 3
courbe limite IV
Z 3 > 450
V
12
calcul en zone "E"
F
13
calcul en zone "D"

```
0001  FFORTRAN GO
0002        FUNCTION BESS1(NU,W)
0003        REAL N,JN,J1,J2,J3,N23,C(8),NU
0004        N=NU
0005        X=W
0006        PI=3.1415926535
0007        IF(X.GE.(0.0)) GO TO 1
0008        WRITE(3,101) N,X
0009        BESS1=0.0
0010        RETURN
0011  1     IF(X.LT.(1.0 E-09)) X=1.0 E-09
0012        IF(N.GE.(0.0)) GO TO 2
0013        WRITE(3,202)
0014        BESS1=0.0
0015        RETURN
0016  2     IF(N.LT.(1.0 E-09)) N=1.0 E-09
0017        IF(X.GT.N) GO TO 3
0018        Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0019        Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0020        IF(ABS(Z1).LT.(1.10)) GO TO 41
0021        Q=(N/X)**2
0022        B=8*X*((Q-1.)**(3./2.))
0023        IF(B.GT.(275.0)) GO TO 51
0024        GO TO 11
0025  C
0026  3     CONTINUE
0027        IF(X.LT.(5.0)) GO TO 11
0028        Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0029        Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0030        IF(ABS(Z1).LT.(1.10)) GO TO 41
0031        P=(X/N)**2
0032        A=8*N*((P-1.)**(3./2.))
0033        IF(A.GT.(450.0)) GO TO 12
0034        GO TO 13
0035  C
0036  51    CONTINUEE
0037  C     ZONE (A)
0038        ASSIGN 100 TO SUITE
0039        GO TO 5
0040  C
0041  11    CONTINUE
0042  C     ZONE (B)
0043        IN=0
0044        IF(X.GE.N) IN=X-NU
0045  6     IN=IN+1
0046        N=NU+IN
0047        Q=(N/X)**2
0048        B=8*X*((Q-1.)**(3./2.))
0049        IF(B.GE.(275.0)) GO TO 7
0050        GO TO 6
0051  7     ASSIGN 8 TO SUITE
0052        GO TO 5
0053  8     J1=JN
0054        N=N+1
0055        ASSIGN 9 TO SUITE
0056        GO TO 5
0057  9     J2=JN
0058        DO 10 I=1,IN
0059        N=N-1.
0060        J3=J1
0061        J1=-J2+(2.*N*J1)/X
```

```
0062          J2=J3
0063    10    CONTINUE
0064          JN=J1
0065          N=N-1.
0066          GO TO 100
0067    C
0068    41    CONTINUE
0069    C     ZONE (C)
0070          IF(X.LT.(5.0)) GO TO 11
0071          ASSIGN 100 TO SUITE
0072          GO TO 4
0073    C
0074    13    CONTINUE
0075    C     ZONE (D)
0076          IF(X.LT.(5.0)) GO TO 11
0077          IN=(X-N)
0078          N=N+IN
0079          Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0080          Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0081          ASSIGN 62 TO SUITE
0082          GO TO 4
0083    62    J1=JN
0084          N=N+1.
0085          Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0086          Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0087          ASSIGN 60 TO SUITE
0088          GO TO 4
0089    60    J2=JN
0090          DO 61 I=1,IN
0091          N=N-1.
0092          J3=J1
0093          J1=-J2+(2.*N*J1)/X
0094          J2=J3
0095    61    CONTINUE
0096          JN=J1
0097          N=N-1.
0098          GO TO 100
0099    C
0100    12    CONTINUE
0101    C     ZONE (E)
0102          ASSIGN 100 TO SUITE
0103          GO TO 14
0104    C
0105    5     CONTINUE
0106    C     CALCUL EN ZONE A
0107          P=(X/N)**2
0108          A=8*N*((1.-P)**(3./2.))
0109          U0=1.
0110          U1=3.
0111          U2=18.
0112          U3=810.
0113          U4=9720.
0114          U5=204120.
0115          U6=18370800.
0116    C
0117          U10=-2.
0118          U11=-3.
0119    C
0120          U20=4.
0121          U21=300.
0122          U22=81.
```

```
0123  C
0124        U30=1112.
0125        U31=-117684.
0126        U32=-278478.
0127        U33=-30375.
0128  C
0129        U40=-9136.
0130        U41=10845408.
0131        U42=94348152.
0132        U43=76261176.
0133        U44=4465125.
0134  C
0135        U50=-5244128.
0136        U51=-1773104784.
0137        U52=-4.11678999 E 10
0138        U53=-1.02542329 E 11
0139        U54=-4.16917709 E 10
0140        U55=-1.51903552 E 09
0141  C
0142        U60=335796416.
0143        U61=1.30287550 E 12
0144        U62=6.77479165 E 13
0145        U63=3.86620962 E 14
0146        U64=4.54230022 E 14
0147        U65=1.11035000 E 14
0148        U66=2.75699998 E 12
0149  C
0150        V0=U0
0151        V1=(U10+P*U11)/U1
0152        V2=(U20+P*(U21+P*(U22)))/U2
0153        V3=(U30+P*(U31+P*(U32+P*(U33))))/U3
0154        V4=(U40+P*(U41+P*(U42+P*(U43+P*(U44)))))/U4
0155        V5=(U50+P*(U51+P*(U52+P*(U53+P*(U54+P*(U55))))))/U5
0156        V6=(P*(U61+P*(U62+P*(U63+P*(U64+P*(U65+P*(U66)))))))
0157        V6=(U60+V6)/U6
0158  C
0159        JN=V0+(V1+(V2+(V3+(V4+(V5+(V6)/A)/A)/A)/A)/A)/A
0160  C
0161        THA=SQRT(1.-((X/N)**2))
0162        JN=JN*(EXP(N*THA))/(SQRT(2.*PI*N*THA))
0163        VACHE=ALOG10(JN)-N*(ALOG10(N*(1.+THA)))+N*(ALOG10(X))
0164        IF(VACHE.GT.(-70.0)) GO TO 204
0165        JN=1.0 E-70
0166        GO TO SUITE
0167  204   CONTINUE
0168        JN=JN*((X/(N*(1.+THA)))**N)
0169        GO TO SUITE
0170  C
0171  4     CONTINUE
0172  C     CALCUL EN ZONE C
0173        Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0174        Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0175        C1=0.355028053887817
0176        C2=0.258819403792807
0177        N23=N**(2./3.)
0178  C     CALCUL DES FONCTIONS DE AIRY# AI,BI,A'I,B'I DE Z1
0179        Z3=Z1*Z1*Z1/3.
0180        F=UF=1.0
0181        G=UG=Z1
0182        FP=UFP=Z1*Z1/2.
0183        GP=UGP=1.0
```

```
0184          DO 19 K=1,19,1
0185          UF=UF*Z3/(K*(3*K-1))
0186          UG=UG*Z3/(K*(3*K+1))
0187          UFP=UFP*Z3/(K*(3*K+2))
0188          UGP=UGP*Z3/(K*(3*K-2))
0189          F=F+UF
0190          G=G+UG
0191          FP=FP+UFP
0192          GP=GP+UGP
0193    19    CONTINUE
0194          AI=C1*F-C2*G
0195          BI=(C1*F+C2*G)*SQRT(3.)
0196          API=C1*FP-C2*GP
0197          BPI=(C1*FP+C2*GP)*SQRT(3.)
0198    C
0199          C(1)=(-Z/5.)/N23
0200          C(2)=(-9.*(Z**5)/100.+3.*(Z**2)/35.)/(N23**2)
0201          C(3)=(957.*(Z**6)/7000.-173.*(Z**3)/3150.-1./225.)
0202          C(3)=(C(3))/(N23**3)
0203          C(4)=(27.*(Z**10.)/20000.-23573.*(Z**7)/147000.)
0204          C(4)=(C(4)+5903.*(Z**4)/138600.+947.*Z/346500.)
0205          C(4)=(C(4))/(N23**4)
0206          C(5)=(3.*Z*Z/10.)
0207          C(6)=(-17.*(Z**3)/70.+1./70.)/N23
0208          C(7)=(-9.*(Z**7)/1000.+611.*(Z**4)/3150.-37.*Z/3150.)
0209          C(7)=(C(7))/(N23**2)
0210          C(8)=549.*(Z**8)/28000.-110767.*(Z**5)/693000.
0211          C(8)=(C(8)+79.*Z*Z/12375.)/(N23**3)
0212          ZL=1.+C(1)+C(2)+C(3)+C(4)
0213          ZM=C(5)+C(6)+C(7)+C(8)
0214          ZL=ZL*((2./N)**(1./3.))
0215          ZM=ZM*(4.**(1./3.))/N
0216          JN=ZL*AI+ZM*API
0217          GO TO SUITE
0218    C
0219    14    CONTINUE
0220    C     CALCUL EN ZONE E
0221    C
0222          U0=1.
0223          U10=2.
0224          U1=3.
0225          U2=18.
0226          U3=810.
0227          U4=9720.
0228          U5=204120.
0229          U6=18370800.
0230    C
0231          U10=2.
0232          U11=3.
0233    C
0234          U20=4.
0235          U21=300.
0236          U22=81.
0237    C
0238          U30=-1112.
0239          U31=117684.
0240          U32=278478.
0241          U33=30375.
0242    C
0243          U40=-9136.
0244          U41=1084540
```

```
0245          U42=94348152.
0246          U43=76261176.
0247          U44=4465125.
0248    C
0249          U50=5244128.
0250          U51=1773104784.
0251          U52=4.11678999 E 10
0252          U53=1.02542329 E 11
0253          U54=4.16917709 E 10
0254          U55=1.51903552 E 09
0255    C
0256          U60=335796416.
0257          U61=1.30287550 E 12
0258          U62=6.77479165 E 13
0259          U63=3.86620962 E 14
0260          U64=4.54230022 E 14
0261          U65=1.11035000 E 14
0262          U66=2.75699998 E 12
0263    C
0264          V0=U0
0265          V1=(U10+P*U11)/U1
0266          V2=(U20+P*(U21+P*(U22)))/U2
0267          V3=(U30+P*(U31+P*(U32+P*(U33))))/U3
0268          V4=(U40+P*(U41+P*(U42+P*(U43+P*(U44)))))/U4
0269          V5=(U50+P*(U51+P*(U52+P*(U53+P*(U54+P*(U55))))))/U5
0270          V6=(P*(U61+P*(U62+P*(U63+P*(U64+P*(U65+P*(U66)))))))
0271          V6=(U60+V6)/U6
0272    C
0273          ZP=V0-(V2/(A**2.))+(V4/(A**4.))-(V6/(A**6.))
0274          ZN=(V1/(A))-(V3/(A**3.))+(V5/(A**5.))
0275          TGB=SQRT(P-1.)
0276          B=ATAN(TGB)
0277          PHI=N*(TGB-B)-0.25*PI
0278          JN=ZP*COS(PHI)+ZN*SIN(PHI)
0279          JN=JN*SQRT(2./(N*TGB*PI))
0280          GO TO SUITE
0281    C
0282    100   BESS1=JN
0283          RETURN
0284    C
0285    C     FORMAT
0286    101   FORMAT(2H**,FNF,E10.4,5X,FX=F,E10.4,FBESS1(N,X)=0.0F)
0287    202   FORMAT(3H***)
0288          RETURN
0289          END
0290    FLOAD
```

V - SOUS PROGRAMME BESS 2 (NU,Z)

(fonction de BESSEL de seconde espèce : $Y_\nu(z)$)

NU = ν réel positif ou nul

Z = z réel positif ou nul

1 - Propriétés de $Y_\nu(z)$

On montre que pour ν et z réels positifs ou nuls, on a :

$$Y_\nu(z)\Big|_{z\to 0} \longrightarrow -\infty$$

$$Y_\nu(z)\Big|_{z\to \infty} \longrightarrow 0$$

A l'exception du voisinage de z = 0, où $Y_\nu(z)$ tend vers l'infini, $Y_\nu(z)$ est une fonction continue décroissante, qui après passage par la valeur zéro devient oscillante autour de cette valeur tout en ayant une enveloppe monotone décroissante vers zéro quand z tend vers l'infini. La valeur de la fonction $Y_\nu(z)$ reste inférieure à l'unité, après son premier passage par zéro.

Les figures (7 et 8) donnent l'allure de cette famille de fonctions.

2 - Principe du Calcul de $Y_\nu(z)$

a) Développement "de définition"

Par définition :

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos(\pi\nu).\, J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}$$

Ce développement fait appel aux fonctions $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$. Si le calcul de $J_\nu(z)$ a pu être effectué, celui de $J_{-\nu}(z)$ est très délicat. Nous allons donc utiliser d'autres développements.

b) Développement de DEBEY pourz < ν

C'est le même genre de développement que celui déjà utilisé pou $J_\nu(z)$ dans la même région et il est donné par l'équation (13).

c) Développement de DEBEYE pour z > ν

Le développement ressemble fortement à celui de $J_\nu(z)$ dans le même domaine, et il est donné par l'équation (15).

d) Développement pour (z ≠≠ ν)

Ce développement ressemble fortement à celui de $J_\nu(z)$ dans le même domaine il est donné par l'équation (17).

.../.

Fig. 7 : Courbes $y = Y_0(x), Y_1(x), Y_2(x)$ ....

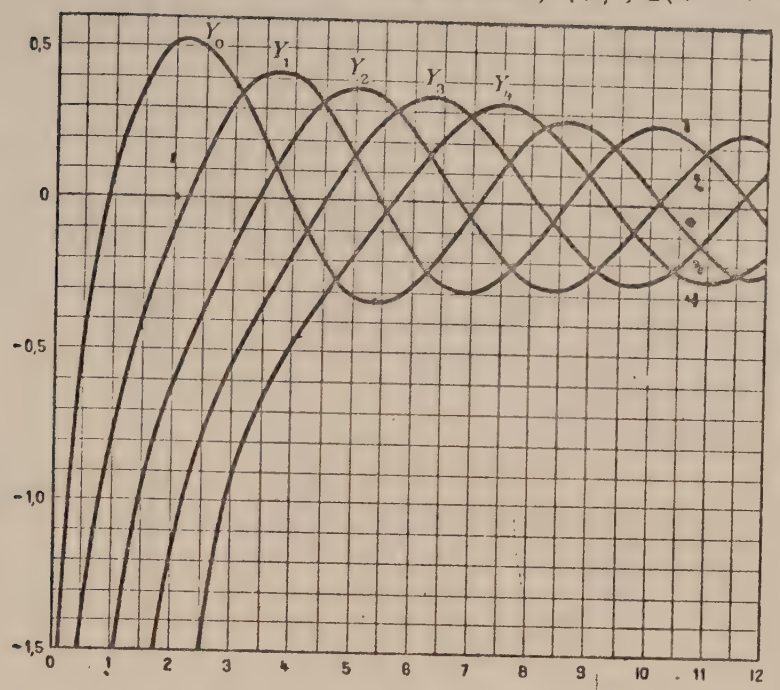
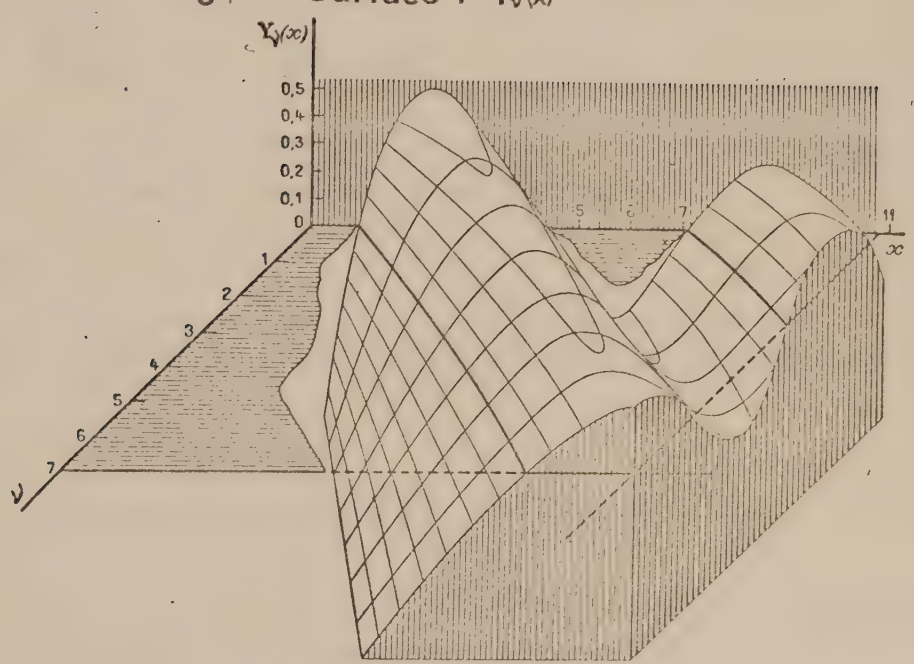


Fig. 8 : Surface : $Y_\nu(x)$



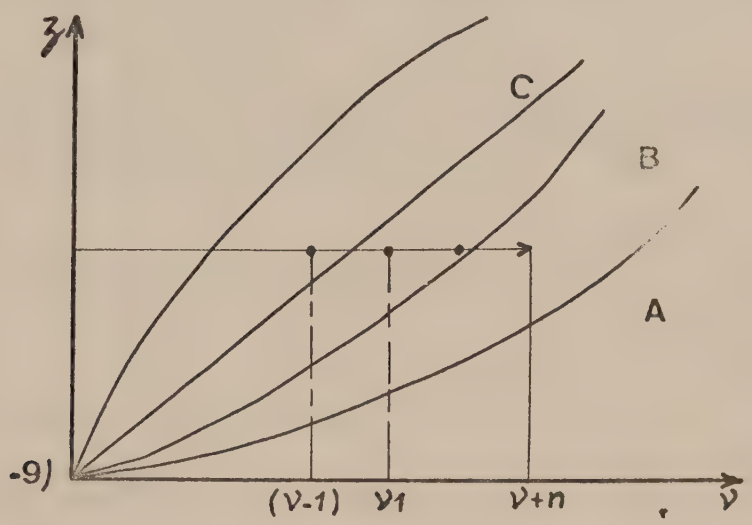
3 - Régionnement et raccordement entre les différentes régions

Les régions (ABCDE) sont les mêmes que celles déjà définies lors du calcul de $J_\nu(z)$, le calcul pour la région B s'effectuant quelque peu différemment. Comme précédemment la définition d'une région complémentaire F, où les calculs s'effectuent à partir de la région A, permet d'améliorer la précision des calculs.

Région B

Afin de calculer la valeur de $Y_\nu(z)$ dans cette région on part de deux points de la région C, l'un à droite de la bissectrice, l'autre à gauche (Figure 9).

fig-9



En effet en utilisant la formule de récurrence on constate que l'on conserve les erreurs absolues faites sur les différents termes de la série $Y_{(\nu+h)}(z)$. Cette erreur absolue est au moins égale à $10^{-9} \times Y_{(\nu+h)}(z)$. Pour minimiser l'erreur relative sur $Y_\nu(z)$ il faut minimiser l'erreur absolue sur $Y_\nu(z)$ donc sur les termes $Y_{\nu+h}(z)$. Il faudrait donc

$$\| Y_{\nu+h}(z) \| < \| Y_\nu(z) \|$$

C'est pour cette raison que pour calculer $J_\nu(z)$ dans le domaine B on part du domaine C et non du domaine A comme précédemment.

Région F

Ici la région F est la partie de la région B où $z < 1,5$. Le calcul s'y effectue à partir de la région A en appliquant la formule de récurrence (au lieu de partir de la région C).

Remarques

- Comme dans le cas de $J_\nu(z)$, on limite les valeurs trop faibles de ν et de z en les posant égales à 10^{-9}.

Dans la région A, $Y_\nu(z)$ risque de prendre des valeurs très élevées (car $|Y_\nu(z)| \xrightarrow[z \to 0]{} -\infty$). Afin de rester toujours dans les limites permises par le calculateur on pose systématiquement $Y_\nu(z) = 10^{70}$ si la valeur absolue de $Y_\nu(z)$ dépasse 10^{70}.

.../.

4 - Organigrammes

Les diagrammes ci-après précisent les organigrammes du programme BESS2 (NU,Z).

5 - Résultats

Ici les résultats sont moins précis que ceux obtenus pour $J_\nu(z)$. La figure 11 résume les différentes zones avec la précision relative trouvée dans chacune d'elles.

zone (1) $\quad \nu \leq 3 \quad z \leq 3$

précision en moyenne 2 chiffres significatifs avec quelques points à un chiffre, le reste étant à 3 chiffres significatifs.

zone (2)

3 chiffres significatifs au moins

zone (3)

4 chiffres significatifs au moins

zone 4 (au delà de(3))

minimum cinq chiffres avec des résultats jusqu'à neuf chiffres significatifs quand ν ou $z > 12$.

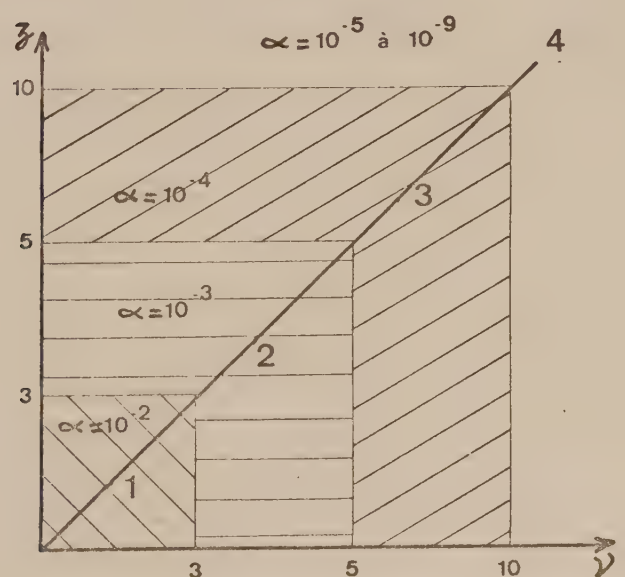
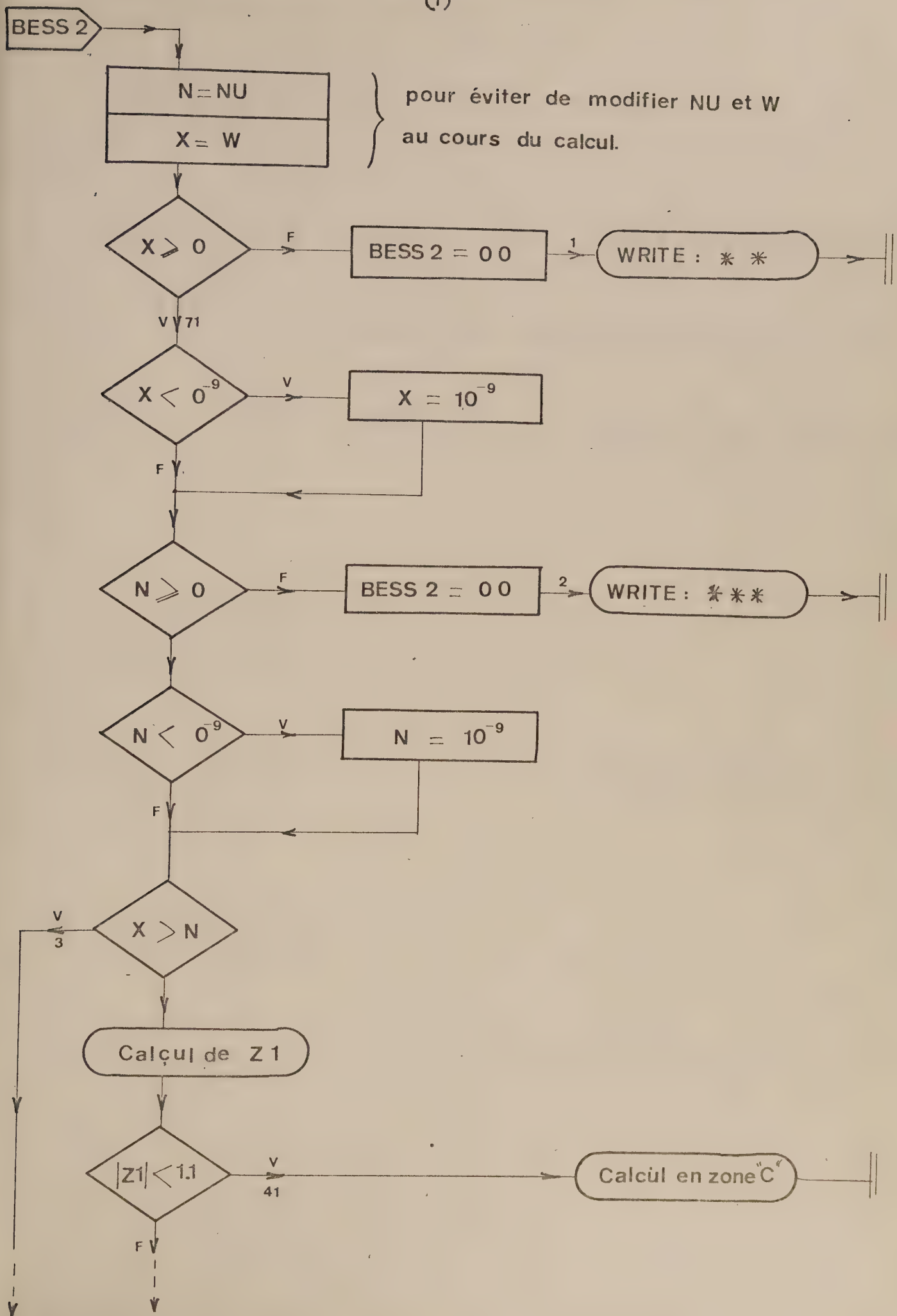


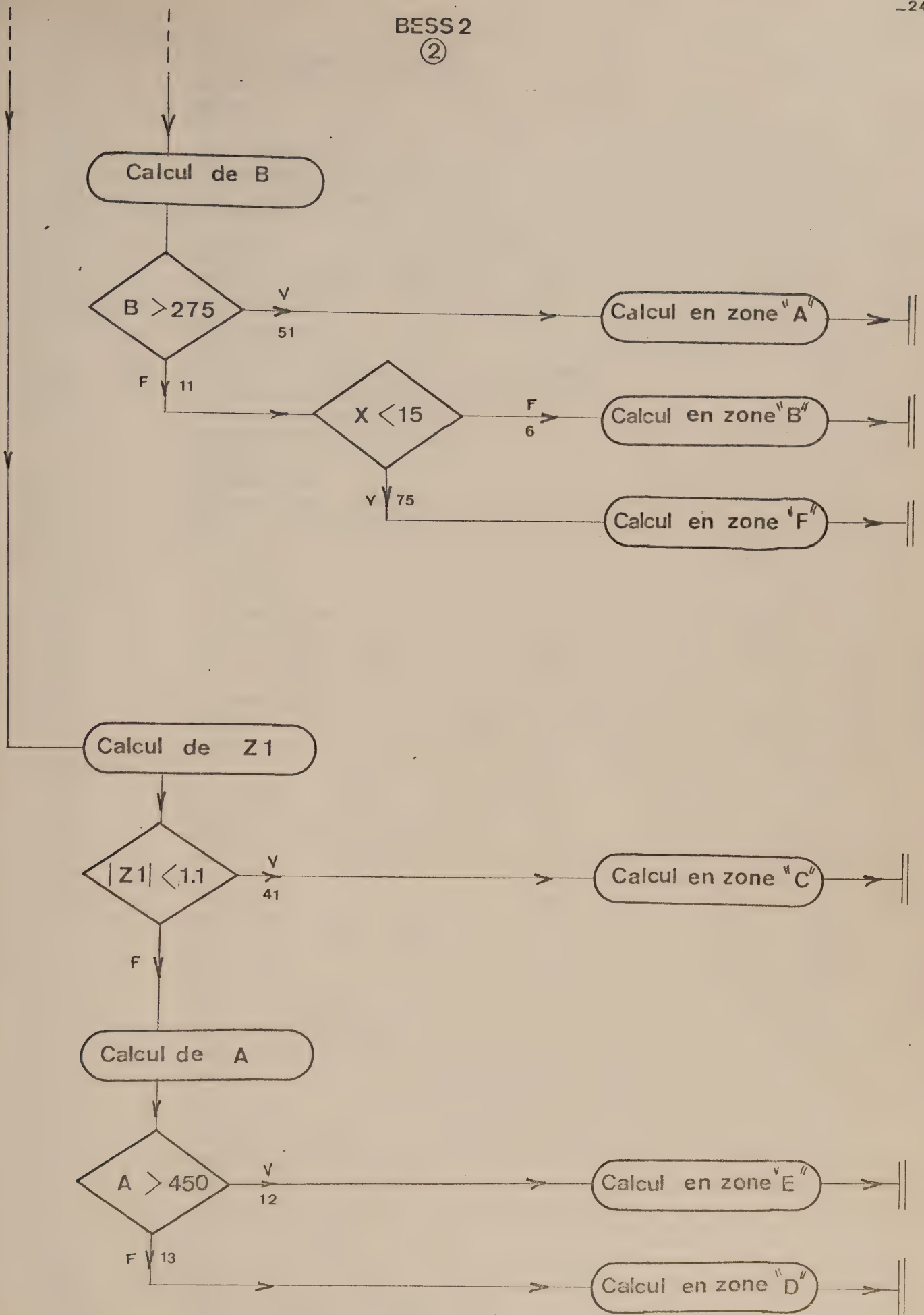
fig - 11

α = précision

Organigramme du régionnement dans BESS 2 (NU, Z)
(1)



BESS 2
②


Calcul de B
B >275
V
51
Calcul en zone "A"
F
11
X <15
F
6
Calcul en zone "B"
V
75
Calcul en zone "F"
Calcul de Z1
|Z1| <1.1
V
41
Calcul en zone "C"
F
Calcul de A
A >450
V
12
Calcul en zone "E"
F
13
Calcul en zone "D"

```
0001  FFORTRAN GO
0002        FUNCTION BESS2(NU,W)
0003        REAL N,N23,C(8),NU
0004        N=NU
0005        X=W
0006        PI=3.1415926535
0007        IF(X.GE.(0.0)) GO TO 71
0008        WRITE(3,1) N,X
0009        BESS2=0.0
0010        RETURN
0011  71    IF(X.LT.(1.0 E-09)) X=1.0 E-09
0012        IF(N.GE.(0.0)) GO TO 72
0013        WRITE(3,2)
0014        BESS2=0.0
0015        RETURN
0016  72    IF(N.LT.(1.0 E-09)) N=1.0 E-09
0017  73    IF(X.GT.N) GO TO 3
0018        Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0019        Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0020        IF(ABS(Z1).LT.(1.10)) GO TO 41
0021        Q=(N/X)**2
0022        B=8*X*((Q-1.)**(3./2.))
0023        IF(B.GT.(275.0)) GO TO 51
0024        GO TO 11
0025  C
0026  3     CONTINUE
0027        Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0028        Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0029        IF(ABS(Z1).LT.(1.10)) GO TO 41
0030        P=(X/N)**2
0031        A=8*N*((P-1.)**(3./2.))
0032        IF(A.GT.(450.)) GO TO 12
0033        GO TO 13
0034  C
0035  51    CONTINUE
0036  C     ZONE (A)
0037        ASSIGN 100 TO SUITE
0038        GO TO 5
0039  C
0040  11    CONTINUE
0041  C     ZONE (B)
0042        IF(X.LT.(1.5)) GO TO 75
0043  6     IN=N-X
0044        N=N-IN
0045        Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0046        Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0047        ASSIGN 8 TO SUITE
0048        GO TO 4
0049  8     Y1=YN
0050        N=N-1.
0051        Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0052        Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0053        ASSIGN 9 TO SUITE
0054        GO TO 4
0055  9      Y2=YN
0056        DO 33 I=1,IN
0057        N=N+1.
0058        Y3=Y1
0059        Y1=-Y2+(2.*N*Y1)/X
0060        Y2=Y3
0061  33    CONTINUE
```

```
0062          YN=Y1
0063          N=N+1.
0064          GO TO 100
0065    C
0066    41    CONTINUE
0067    C     ZONE (C)
0068          ASSIGN 100 TO SUITE
0069          GO TO 4
0070    C
0071    13    CONTINUE
0072    C     ZONE (D)
0073          IN=(X-N)
0074          N=N+IN
0075          Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0076          Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0077          ASSIGN 62 TO SUITE
0078          GO TO 4
0079    62    Y1=YN
0080          N=N+1.
0081          Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0082          Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0083          ASSIGN 60 TO SUITE
0084          GO TO 4
0085    60    Y2=YN
0086          DO 61 I=1,IN
0087          N=N-1.
0088          Y3=Y1
0089          Y1=-Y2+(2.*N*Y1)/X
0090          Y2=Y3
0091    61    CONTINUE
0092          YN=Y1
0093          N=N-1.
0094          GO TO 100
0095    C
0096    12    CONTINUE
0097    C     ZONE (E)
0098          ASSIGN 100 TO SUITE
0099          GO TO 14
0100    C
0101    C
0102    75    CONTINUE
0103    C     ZONE (F)
0104          N=N+2.
0105          ASSIGN 76 TO SUITE
0106          GO TO 5
0107    76    Y1=YN
0108          N=N+1.
0109          ASSIGN 77 TO SUITE
0110          GO TO 5
0111    77    Y2=YN
0112          N=N-1.
0113          Y3=Y1
0114          Y1=-Y2+(2.*N*Y1)/X
0115          N=N-1.
0116          Y2=Y3
0117          YN=-Y2+(2.*N*Y1)/X
0118          N=N-1.
0119          GO TO 100
0120    5     CONTINUE
0121    C     CALCUL EN ZONE A
0122          U0=1.
```

```
0123          U1=3.
0124          U2=18.
0125          U3=810.
0126          U4=9720.
0127          U5=204120.
0128          U6=18370800.
0129    C
0130          U10=-2.
0131          U11=-3.
0132    C
0133          U20=4.
0134          U21=300.
0135          U22=81.
0136    C
0137          U30=1112.
0138          U31=-117684.
0139          U32=-278478.
0140          U33=-30375.
0141    C
0142          U40=-9136.
0143          U41=10845408.
0144          U42=94348152.
0145          U43=76261176.
0146          U44=4465125.
0147    C
0148          U50=-5244128.
0149          U51=-1773104784.
0150          U52=-4.11678999 E 10
0151          U53=-1.02542329 E 11
0152          U54=-4.16917709 E 10
0153          U55=-1.51903552 E 09
0154    C
0155          U60=335796416.
0156          U61=1.30287550 E 12
0157          U62=6.77479165 E 13
0158          U63=3.86620962 E 14
0159          U64=4.54230022 E 14
0160          U65=1.11035000 E 14
0161          U66=2.75699998 E 12
0162    C
0163          P=(X/N)**2
0164          A=8*N*((1.-P)**(3./2.))
0165          V0=U0
0166          V1=(U10+P*U11)/U1
0167          V2=(U20+P*(U21+P*(U22)))/U2
0168          V3=(U30+P*(U31+P*(U32+P*(U33))))/U3
0169          V4=(U40+P*(U41+P*(U42+P*(U43+P*(U44)))))/U4
0170          V5=(U50+P*(U51+P*(U52+P*(U53+P*(U54+P*(U55))))))/U5
0171          V6=(P*(U61+P*(U62+P*(U63+P*(U64+P*(U65+P*(U66)))))))
0172          V6=(U60+V6)/U6
0173    C
0174          YN=V0-(V1-(V2-(V3-(V4-(V5-(V6)/A)/A)/A)/A)/A)/A
0175    C
0176          THA=SQRT(1.-((X/N)**2))
0177          YN=-YN*(EXP(-N*THA))/(SQRT(0.5*PI*N*THA))
0178          VACHE=ALOG10(ABS(YN))-N*(ALOG10(X))
0179          VACHE=VACHE+N*(ALOG10(N*(1.+THA)))
0180          IF(VACHE.LT.(70.0)) GO TO 204
0181          YN=-1.0 E+70
0182          GO TO SUITE
0183    204   CONTINUE
```

```
0184          YN=YN/((X/(N*(1.+THA)))**N)
0185          GO TO SUITE
0186    C
0187    4     CONTINUE
0188    C     CALCUL EN ZONE C
0189          Z=(X-N)/(N**(1./3.))
0190          Z1=-Z*(2.**(1./3.))
0191          C1=0.355028053887817
0192          C2=0.258819403792807
0193          N23=N**(2./3.)
0194    C     CALCUL DES FONCTIONS DE AIRY* AI,BI,A'I,B'I DE Z1
0195          Z3=Z1*Z1*Z1/3.
0196          F=UF=1.0
0197          G=UG=Z1
0198          FP=UFP=Z1*Z1/2.
0199          GP=UGP=1.0
0200          DO 19 K=1,19,1
0201          UF=UF*Z3/(K*(3*K-1))
0202          UG=UG*Z3/(K*(3*K+1))
0203          UFP=UFP*Z3/(K*(3*K+2))
0204          UGP=UGP*Z3/(K*(3*K-2))
0205          F=F+UF
0206          G=G+UG
0207          FP=FP+UFP
0208          GP=GP+UGP
0209    19    CONTINUE
0210          AI=C1*F-C2*G
0211          BI=(C1*F+C2*G)*SQRT(3.)
0212          API=C1*FP-C2*GP
0213          BPI=(C1*FP+C2*GP)*SQRT(3.)
0214    C
0215          C(1)=(-Z/5.)/N23
0216          C(2)=(-9.*(Z**5)/100.+3.*(Z**2)/35.)/(N23**2)
0217          C(3)=(957.*(Z**6)/7000.-173.*(Z**3)/3150.-1./225.)
0218          C(3)=(C(3))/(N23**3)
0219          C(4)=(27.*(Z**10.)/20000.-23573.*(Z**7)/147000.)
0220          C(4)=(C(4)+5903.*(Z**4)/138600.+947.*Z/346500.)
0221          C(4)=(C(4))/(N23**4)
0222          C(5)=(3.*Z*Z/10.)
0223          C(6)=(-17.*(Z**3)/70.+1./70.)/N23
0224          C(7)=(-9.*(Z**7)/1000.+611.*(Z**4)/3150.-37.*Z/3150.)
0225          C(7)=(C(7))/(N23**2)
0226          C(8)=549.*(Z**8)/28000.-110767.*(Z**5)/693000.
0227          C(8)=(C(8)+79.*Z*Z/12375.)/(N23**3)
0228          ZL=1.+C(1)+C(2)+C(3)+C(4)
0229          ZM=C(5)+C(6)+C(7)+C(8)
0230          ZL=ZL*((2./N)**(1./3.))
0231          ZM=ZM*(4.**(1./3.))/N
0232          YN=-ZL*BI-ZM*BPI
0233          GO TO SUITE
0234    C
0235    14    CONTINUE
0236    C     CALCUL EN ZONE E
0237    C
0238          U0=1.
0239          U1=3.
0240          U2=18.
0241          U3=810.
0242          U4=9720.
0243          U5=204120.
0244          U6=18370800.
```

```
0245  C
0246        U10=2.
0247        U11=3.
0248  C
0249        U20=4.
0250        U21=300.
0251        U22=81.
0252  C
0253        U30=-1112.
0254        U31=117684.
0255        U32=278478.
0256        U33=30375.
0257  C
0258        U40=-9136.
0259        U41=10845408.
0260        U42=94348152.
0261        U43=76261176.
0262        U44=4465125.
0263  C
0264        U50=5244128.
0265        U51=1773104784.
0266        U52=4.11678999 E 10
0267        U53=1.02542329 E 11
0268        U54=4.16917709 E 10
0269        U55=1.51903552 E 09
0270  C
0271        U60=335796416.
0272        U61=1.30287550 E 12
0273        U62=6.77479165 E 13
0274        U63=3.86620962 E 14
0275        U64=4.54230022 E 14
0276        U65=1.11035000 E 14
0277        U66=2.75699998 E 12
0278  C
0279        V0=U0
0280        V1=(U10+P*U11)/U1
0281        V2=(U20+P*(U21+P*(U22)))/U2
0282        V3=(U30+P*(U31+P*(U32+P*(U33))))/U3
0283        V4=(U40+P*(U41+P*(U42+P*(U43+P*(U44)))))/U4
0284        V5=(U50+P*(U51+P*(U52+P*(U53+P*(U54+P*(U55))))))/U5
0285        V6=(P*(U61+P*(U62+P*(U63+P*(U64+P*(U65+P*(U66)))))))
0286        V6=(U60+V6)/U6
0287  C
0288        ZP=V0-(V2/(A**2.))+(V4/(A**4.))-(V6/(A**6.))
0289        ZN=(V1/(A))-(V3/(A**3.))+(V5/(A**5.))
0290        TGB=SQRT(P-1.)
0291        B=ATAN(TGB)
0292        PHI=N*(TGB-B)-0.25*PI
0293        YN=ZP*SIN(PHI)-ZN*COS(PHI)
0294        YN=YN*SQRT(2./(N*TGB*PI))
0295        GO TO SUITE
0296  C
0297  100   BESS2=YN
0298        RETURN
0299  C
0300  C     FORMAT
0301  1     FORMAT(2H**,FN=F,E10.4,2X,FX=F,E10.4,FBESS2(NU,X)=0.0F)
0302  2     FORMAT(3H***)
0303  74    FORMAT(2H**,FN=F,E10.4,2X,FX=F,E10.4,FBESS2(NU,X)=0.0F)
0304        RETURN
0305        END
```